UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "G. D'ANNUNZIO" DI CHIETI-PESCARA
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

❖

CORSO DI LAUREA QUINQUENNALE, CORSI DI LAUREA TRIENNALI

INSEGNAMENTO DI **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

a.a. 2011-2012

Docente M. **VASTA**

Seconda prova d'esonero del 22.12.2011
Tema A

I quesiti ***4***, ***5*** *e* ***6*** *valgono per l'esame del modulo di Teoria delle Strutture e sono facoltativi.*

La struttura in Fig. **1** è realizzata con una trave di acciaio la cui sezione è riportata in Fig. **2**. Lo spessore della sezione è costante e pari a *s*; la forza normale *ql* passa per il baricentro.

1. Si disegni lo schema di struttura libera e i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.
2. Si studi lo stato di tensione nella sezione ritenuta più sollecitata, determinando leggi analitiche e diagrammi delle tensioni normali e tangenziali.
3. In corrispondenza del punto **Q** di tale sezione effettuare la verifica di resistenza con il *criterio di von Mises.*
4. Classificare lo stato tensionale in **Q**, determinando il tensore della tensione, gli invarianti della tensione e le tensioni principali. Rappresentare lo stato tensionale in **Q** attraverso i *cerchi di Mohr* e determinare graficamente tensioni e direzioni principali.
5. Nel punto **Q**, determinare le componenti della deformazione ($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$) e le deformazioni principali ($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$). Scrivere il tensore della deformazione nel sistema di riferimento *x,y,z* e nel sistema di riferimento principale. Mostrare che la dilatazione cubica ε_v non dipende dal sistema di riferimento in cui si calcola il tensore della deformazione. Nel punto Q il volume di un elemento infinitesimo diminuisce o aumenta?
6. Effettuare le verifiche di resistenza in Q utilizzando i seguenti criteri: *Galileo-Rankine, Saint Venant-Grashof, Tresca, von Mises.*

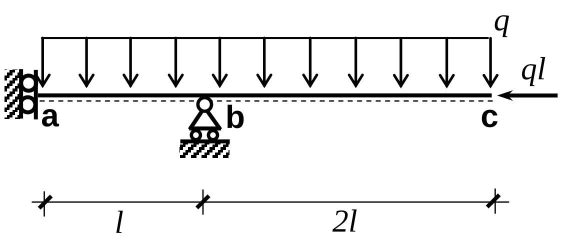


Fig.1 *Schema statico*

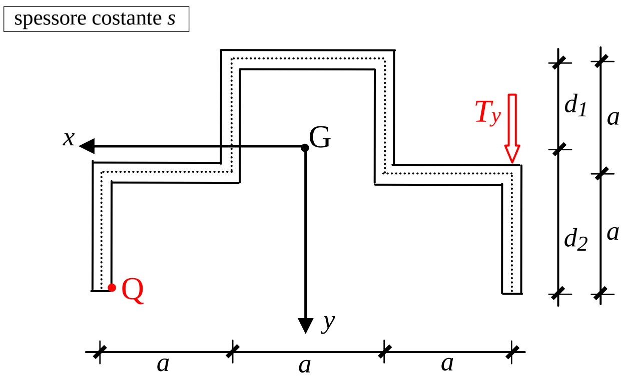


Fig.2 *Sezione*

DATI. *Schema statico*: l=100 cm, q=0,01 kN/cm.

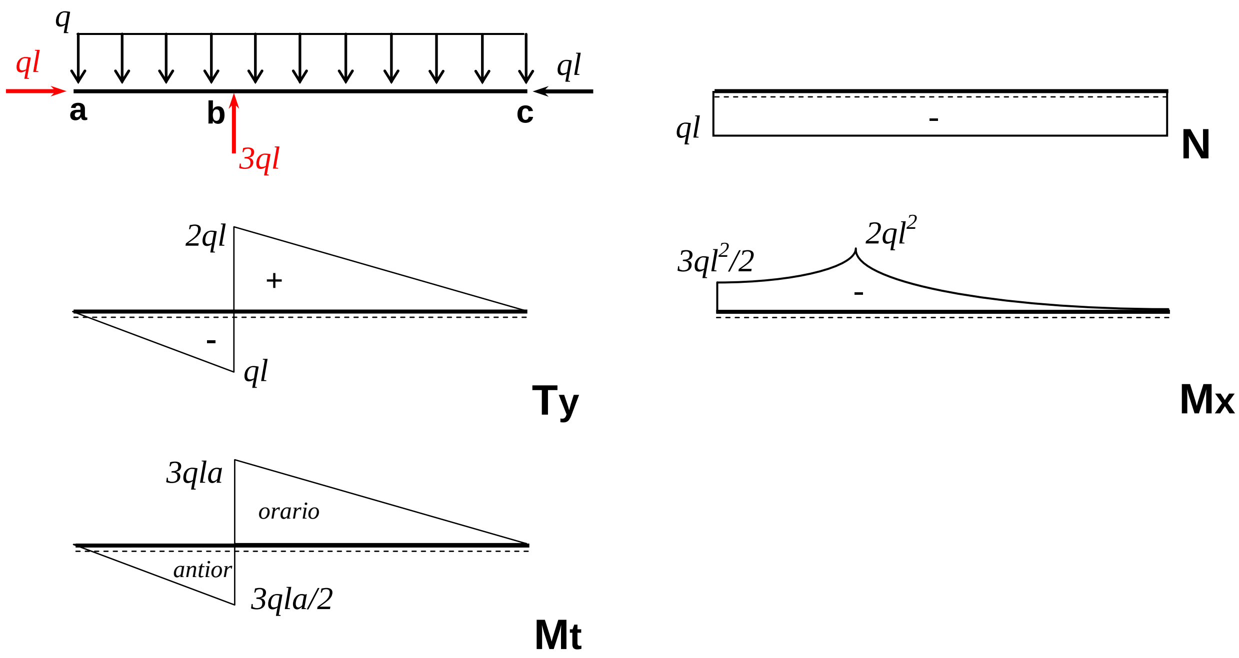
Sezione: a=5 cm, s=0.5 cm, d_1=4.29 cm, d_2=5.71 cm, A=17.5 cm^2, I_x= 137.07 cm^4.

Materiale: elastico, lineare, omogeneo, isotropo: E=21000 kN/cm^2, G=8100 kN/cm^2, ν= 0.3, σ_0=23.5 kN/cm^2.

COGNOME .... NOME .... MATR.	Lasciare libero questo spazio

Soluzione Tema A

1) Reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione



2) Stato tensionale nella sezione più sollecitata (sezione B⁺)

2a. Sollecitazioni agenti nella sezione B

N = $-ql$ = -1kN; $T_y = 2ql$ = 2kN; $M_x = -2ql^2$ = -200 kNcm; $M_t = T_y$*3a/2 = 15kNcm (verso orario)

2b. Tensioni normali σ_z *(vedi fig. alla pag. seguente)*

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A} = -\frac{200}{137{,}07} y - \frac{1}{17{,}5} = -1{,}459 y - 0{,}057 \ \ [\text{kN/cm}^2]$$

<u>asse neutro</u> : $\sigma_z = 0 \ \Rightarrow \quad y = -\dfrac{0{,}057}{1{,}459} = -0{,}04\,\text{cm}$

σ_{zmax} (y = -4,29) = 6,20 kN/cm^2

σ_{zmin} (y = 5,71) = -8,39 kN/cm^2

σ_z (Q) ≅ σ_{zmin} = -8,39 kN/cm^2

2c. Tensioni tangenziali dovute al taglio *(vedi fig. alla pag.seguente)*

$$\vec{\tau}(\eta) = -\frac{T_y S_x^*(\eta)}{I_x s} = -\frac{2 S_x^*(\eta)}{137{,}07 \cdot 0{,}5} = -0{,}0292 S_x^*(\eta) \ [\text{kN/cm}^2]$$

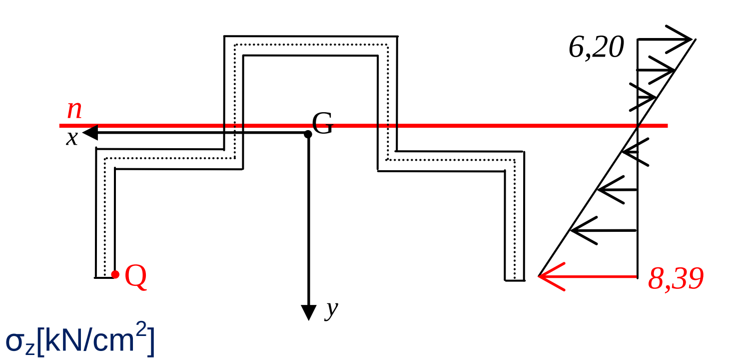
$$\tau_{taglio}(Q) = 0 \ \text{kN/cm}^2$$

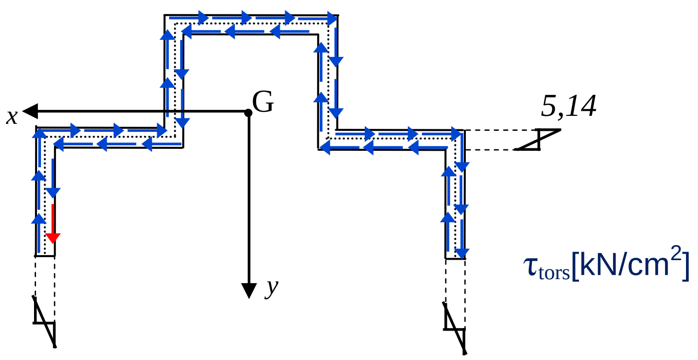
2d. Tensioni tangenziali dovute alla torsione (M_t orario) *(vedi fig. alla pag.seguente)*

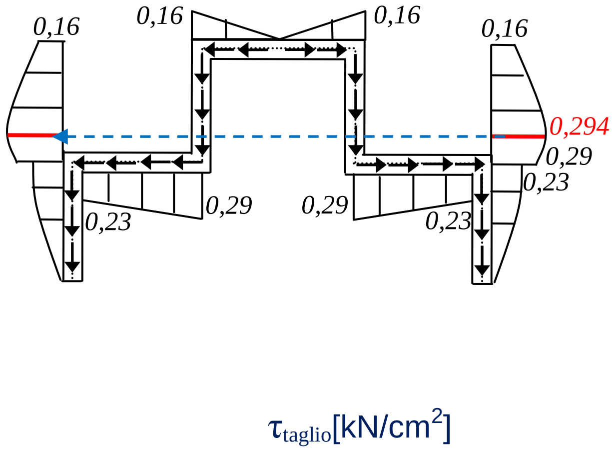
$$\tau^{max} = \frac{M_t}{I_t} s = \frac{15}{1{,}46} \cdot 0{,}5 = 5{,}14 \ \text{kN/cm}^2 \ \text{(nulla sulla linea media)}$$

$$\tau_{tors}(Q) \cong 5{,}14 \ \text{kN/cm}^2 \ \text{(diretta verso il basso)}$$

2e. Diagrammi dello stato tensionale (valori in kN/cm^2)







3)Verifica nel punto Q (Von Mises)

in Q si ha:

σ_z = -8,39 kN/cm^2; τ_{zy} = 0+5,14 = 5,14 kN/cm^2 (verso il basso)

$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-8{,}39)^2 + 3 \cdot (5{,}14)^2} = 12{,}23\, kN/cm^2 < \sigma_0$ Verifica soddisfatta

4)Stato tensionale in Q

σ_z = -8,39 kN/cm^2; τ_{zy} = 5,14 kN/cm^2

$\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$

Tensore della tensione in Q e invarianti (unità di misura: kN e cm):

$$T(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}14 \\ 0 & 5{,}14 & -8{,}39 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -8{,}39 \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -26{,}42 \\ I_3 = \det(T) = 0 \end{cases}$$

Equazione caratteristica (unità di misura: kN e cm):

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \qquad \sigma_n^3 + 8{,}39\sigma_n^2 - 26{,}42\sigma_n = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = 2{,}44\,\text{kN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \frac{I_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = -10{,}83\,\text{kN/cm}^2; \quad \sigma_3 = 0$$

Classificazione dello stato tensionale in Q

Lo stato tensionale in Q è piano (I_3=0) con direzione principale associata a $\sigma_3=0$ coincidente con *x*. Il cerchio di Mohr C_3 relativo alla direzione principale *x*, ha centro K_3 e raggio R espressi da:

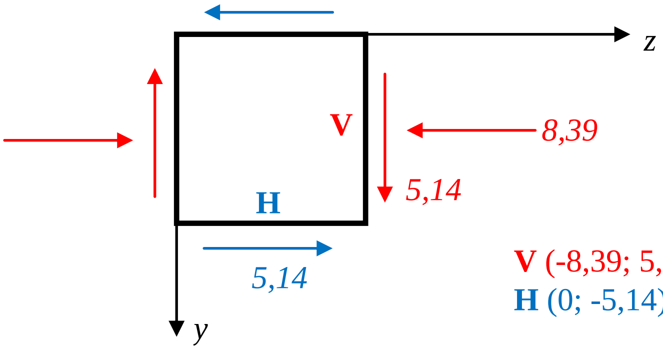
$$K_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2};0\right)\equiv(-4{,}195;0) \qquad R=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=6{,}635 \qquad (\mathrm{kN/cm^2})$$

$$C_3: (\sigma_n+4{,}195)^2+\tau_n^2=(6{,}635)^2$$

4a. Cerchio di Mohr C_3 in Q

Stato tensionale in Q

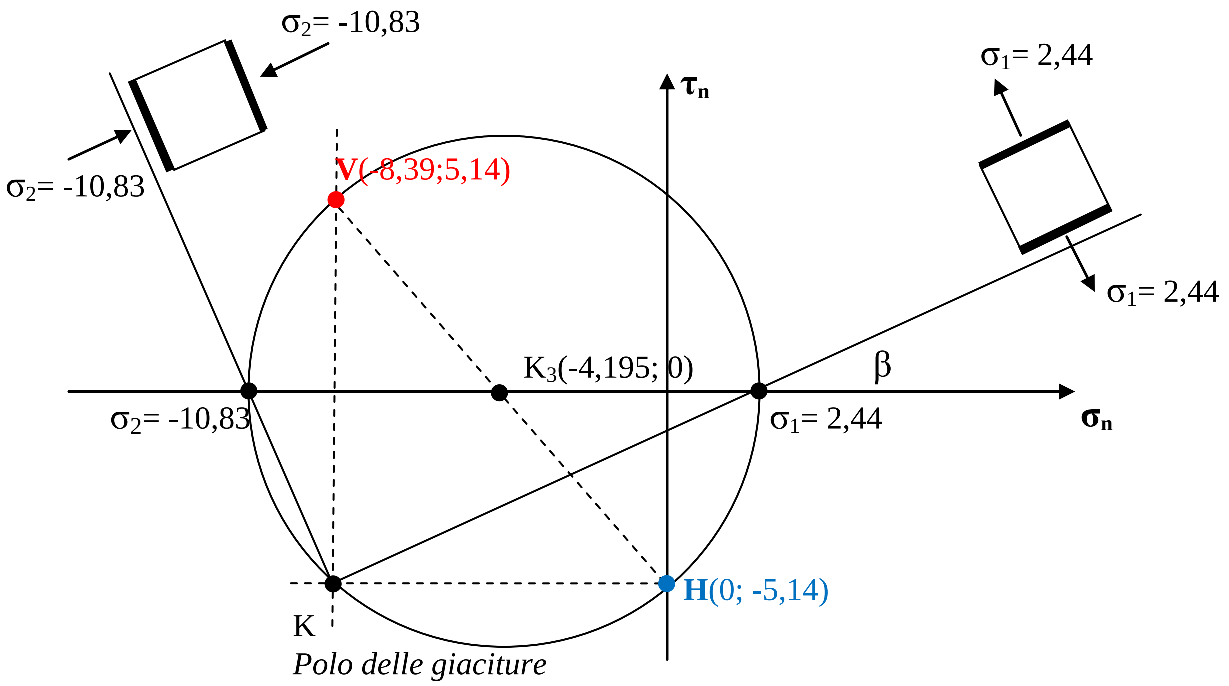
σ_z = -8,39 kN/cm^2; τ_{zy} = 5,14 kN/cm^2; $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$



unità di misura in kN/cm^2

V (-8,39; 5,14)
H (0; -5,14)

Convenzioni
σ_n positive se di trazione
τ_n positive se formano una coppia oraria



$\beta \cong 25{,}4°$ (antiorario) (kN/cm^2)

5)Stato deformativo in Q

Materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo: leggi generalizzate di Hooke

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = 1{,}199 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_z + \sigma_x\right) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = 1{,}199 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \dfrac{\sigma_z}{E} = -3{,}995 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{zx} = 0 \\ \gamma_{zy} = \dfrac{\tau_{zy}}{G} = 6{,}346 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento x,y,z

$$\varepsilon(Q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}199 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}199 \cdot 10^{-4} & 3{,}173 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 3{,}173 \cdot 10^{-4} & -3{,}995 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Deformazioni principali

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_2 = 2{,}709 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_1 = -5{,}506 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) = 1{,}199 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Nota: $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$ essendo *x* la terza dir. principale

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento principale

$$\varepsilon(Q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}709 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -5{,}506 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}199 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Dilatazione cubica

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -1{,}597 \cdot 10^{-4}$$

(essendo $\varepsilon_v = \Delta V / V$ negativo, il volume dell'elemento intorno a Q *diminuisce*)

6)Verifiche di resistenza in Q

Caratteristiche del materiale

$\sigma_0 = 23{,}5\, kN/cm^2$

$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E = 1{,}12 \cdot 10^{-3}$

Galileo-Rankine

$\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_0$ OK

Saint Venant-Grashof

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < \varepsilon_0$ OK

Von Mises

$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = 12{,}23\, kN/cm^2$

$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK

Tresca

$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_2 = 13{,}27\, kN/cm^2$

$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK