

Soluzioni Tema A

Problema 1

Per risolvere il problema, scegliamo i sistemi di riferimento locali come nella figura seguente dove i versi positivi dell'asse y locale sono evidenziati con un tratto di linea punteggiato:

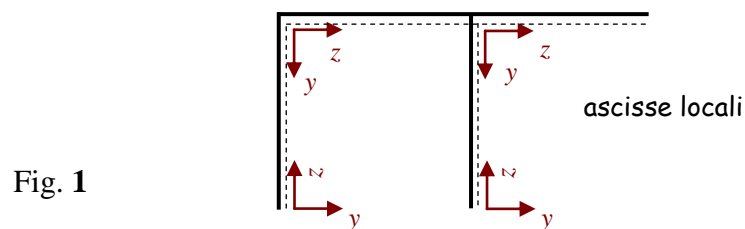


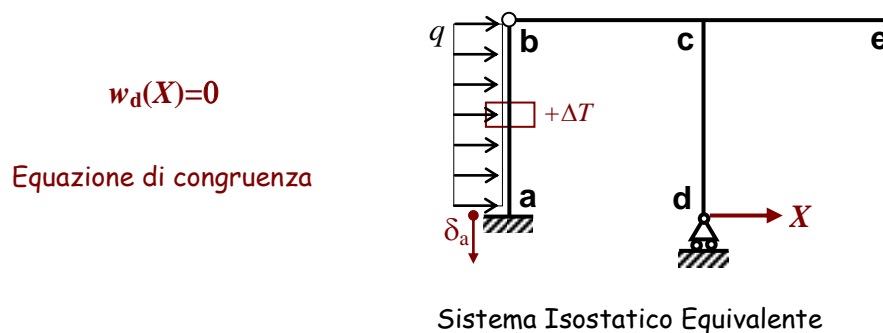
Fig. 1

L'asta **ab** è soggetta ad una variazione termica uniforme che induce una dilatazione assiale termica pari a:

$$\varepsilon_T = +\alpha\Delta T \quad (1)$$

positiva trattandosi di un riscaldamento uniforme dell'asta.

1. Sistema isostatico principale e incognita iperstatica



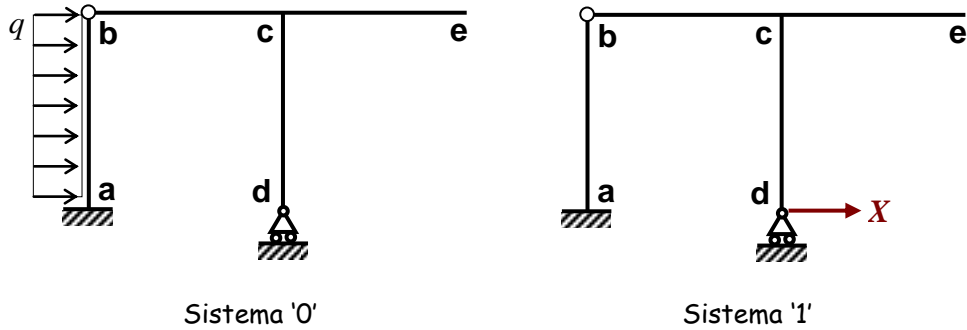


Fig. 2

2. Studio del sistema '0'

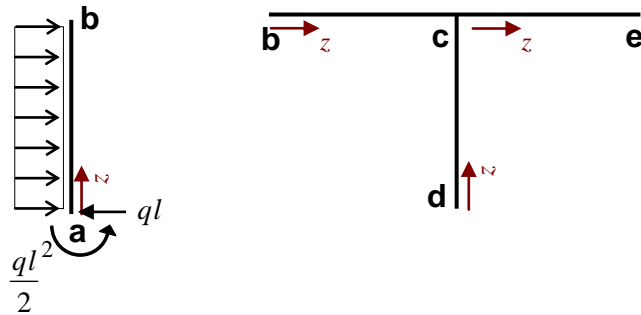


Fig. 3

Tratto	N_0	T_0	M_0
ab $0 \leq z \leq l$	0	$ql - qz$	$qlz - qz^2/2 - ql^2/2$
bc $0 \leq z \leq l$	0	0	0
dc $0 \leq z \leq l$	0	0	0
ce $0 \leq z \leq l$	0	0	0

I relativi diagrammi sono riportati nella figura seguente.

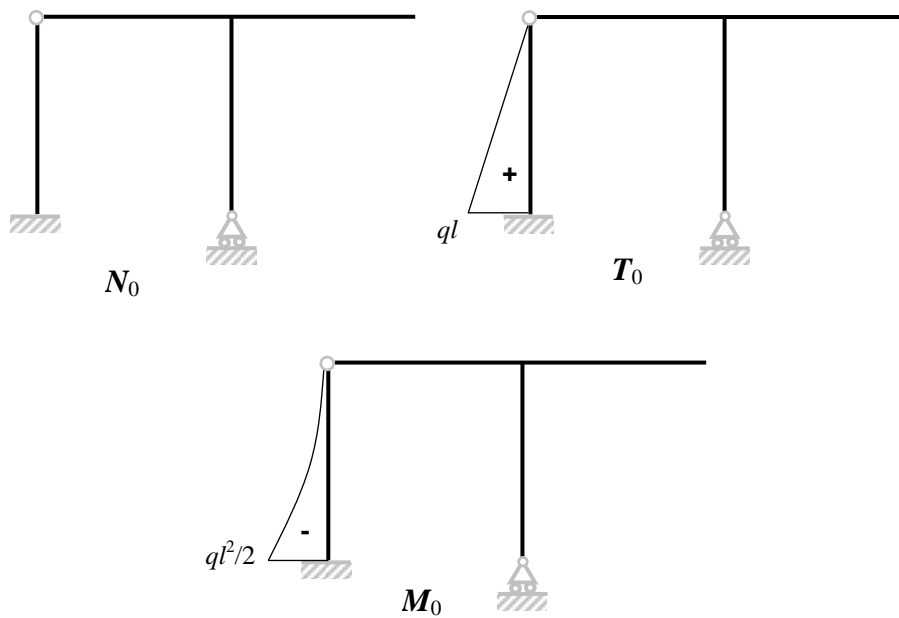


Fig. 4

3. Studio del sistema '1'

Come al solito, il sistema '1' si studia scegliendo gli stessi sistemi di riferimento locali fissati all'inizio.

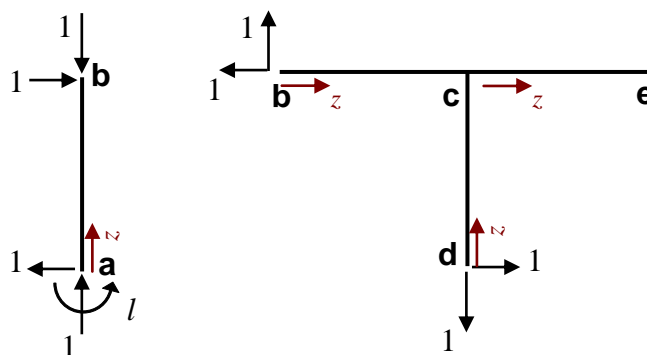
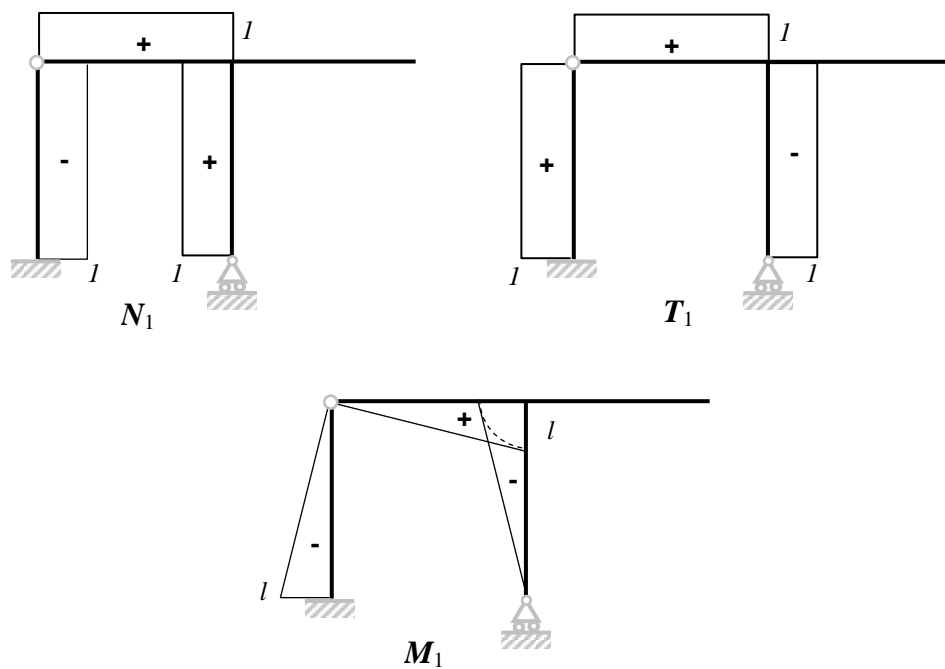


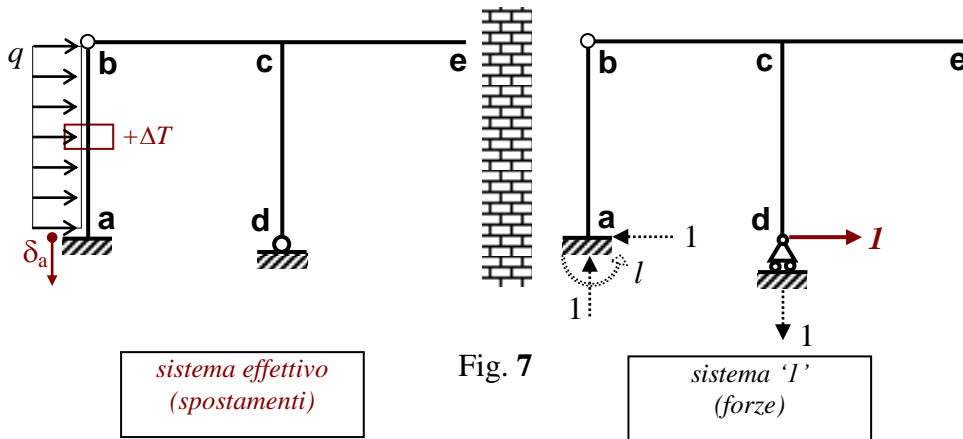
Fig. 5

Tratto		N_1	T_1	M_1
ab	$0 \leq z \leq l$	-1	1	$z-l$
bc	$0 \leq z \leq l$	1	1	z
dc	$0 \leq z \leq l$	1	-1	$-z$
ce	$0 \leq z \leq l$	0	0	0



4. Equazione dei Lavori Virtuali $L_e^v = L_i^v$

La figura seguente mette a confronto il sistema effettivo ed il sistema virtuale.



Per quanto riguarda il Lavoro Virtuale Esterno si ha:

$$L_e^v = -1 \cdot \delta_a \quad (2)$$

Per quanto riguarda il Lavoro Virtuale Interno, poiché $EA \rightarrow \infty$ e la variazione termica uniforme agisce solo nel tratto **ab** e poiché il tratto **ce** è scarico nel sistema '1', si ha:

$$L_i^v = \int_{\text{tratto ab}} N_1 \varepsilon_T dz + \int_{\text{tratto ab}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz + \int_{\text{tratto bc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz + \int_{\text{tratto dc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz$$

I precedenti integrali si sviluppano come segue:

$$\int_{\text{tratto ab}} N_1 \varepsilon_T dz = \int_0^l N_1 \varepsilon_T dz = \int_0^l (-1) \varepsilon_T dz = -\varepsilon_T l = -\alpha \Delta T l \quad (3a)$$

$$\int_{\text{tratto ab}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \frac{M_0 + xM_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_0 dz + \frac{x}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \quad (3b)$$

$$\int_{\text{tratto bc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \frac{M_0 + xM_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 \cancel{M_0} dz + \frac{x}{EI} \int_0^l M_1^2 dz = \frac{x}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \quad (4)$$

$$\int_{\text{tratto dc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \frac{M_0 + xM_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 \cancel{M_0} dz + \frac{x}{EI} \int_0^l M_1^2 dz = \frac{x}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \quad (5)$$

dove:

Tratto	$M_1 M_0$	M_1^2
ab $0 \leq z \leq l$	$\frac{3}{2} qlz^2 - \frac{3}{2} ql^2 z - \frac{1}{2} qz^3 + \frac{1}{2} ql^3$	$z^2 + l^2 - 2zl$
bc $0 \leq z \leq l$	0	z^2
dc $0 \leq z \leq l$	0	z^2

Tratto	$\int M_1 M_0$	$\int M_1^2$
ab $0 \leq z \leq l$	$\frac{1}{8} ql^4$	$\frac{1}{3} l^3$
bc $0 \leq z \leq l$	0	$\frac{1}{3} l^3$
dc $0 \leq z \leq l$	0	$\frac{1}{3} l^3$

Le equazioni (3)-(5) si esplicitano dunque come segue:

$$\int_{\text{tratto ab}} N_1 \varepsilon_T dz = -\alpha \Delta T l \quad (6a)$$

$$\int_{\text{tratto ab}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = \frac{ql^4}{8EI} + X \frac{l^3}{3EI} \quad (6b)$$

$$\int_{\text{tratto bc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = X \frac{l^3}{3EI} \quad (7)$$

$$\int_{\text{tratto dc}} M_1 \frac{M^{\text{eff}}}{EI} dz = X \frac{l^3}{3EI} \quad (8)$$

Il Lavoro Interno Virtuale è la somma dei contributi (6)-(8):

$$L_i^v = \frac{ql^4}{8EI} + X \frac{l^3}{EI} - \alpha \Delta T l \quad (9)$$

L'equazione dei Lavori Virtuali si scrive dunque:

$$\frac{ql^4}{8EI} + X \frac{l^3}{EI} - \alpha \Delta T l = -\delta_a \quad (10)$$

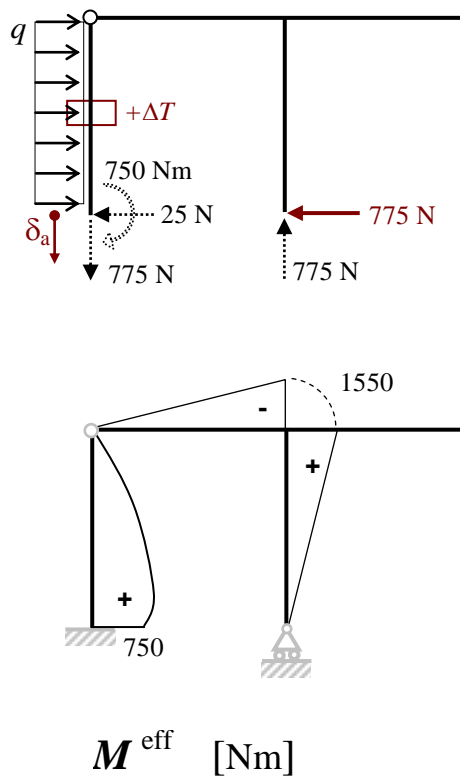
da cui finalmente:

$$X = -\frac{1}{8} ql - \frac{EI}{l^3} \delta_a + \frac{EI}{l^2} \alpha \Delta T \quad (11)$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

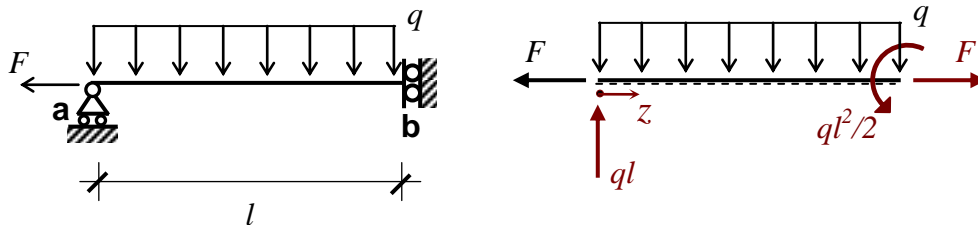
$$X = -775 \text{ N} \quad (12)$$

5. Reazioni e diagrammi effettivi



Problema 2

1. Caratteristiche della sollecitazione



$$\begin{aligned}
 0 \leq z \leq l & \quad N(z) = F \\
 0 \leq z \leq l & \quad T(z) = ql - qz \\
 0 \leq z \leq l & \quad M(z) = qlz - qz^2/2
 \end{aligned}$$

2. Spostamenti assiali $w(z)$

$$N(z) = EA w'(z) \Rightarrow w'(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$w'(z) = \frac{F}{EA}$$

$$w(z) = \frac{F}{EA} z + a_1$$

per determinare la costante a_1 è necessaria una condizione sugli spostamenti assiali:

$$w_b = 0 \Rightarrow w(l) = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{F}{EA} l$$

pertanto deformazioni e spostamenti assiali sono forniti dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(z) = w'(z) &= \frac{F}{EA} \\
 w(z) &= -\frac{F}{EA} (l - z)
 \end{aligned}$$

3. Spostamenti flessionali $v(z)$

$$M(z) = -EIv''(z) \Rightarrow v''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

$$v''(z) = -\frac{1}{EI} \left(qlz - \frac{qz^2}{2} \right)$$

$$v'(z) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qlz^2}{2} - \frac{qz^3}{6} \right) + c_1$$

$$v(z) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qlz^3}{6} - \frac{qz^4}{24} \right) + c_1z + c_2$$

Le due costanti di integrazione si ricavano con le seguenti due condizioni al contorno:

$$v_a = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\varphi_b = 0 \Rightarrow v'(l) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{ql^3}{3EI}$$

pertanto curvatura e spostamenti trasversali sono forniti dalle seguenti equazioni:

$$\chi(z) = -v''(z) = \frac{qlz}{EI} - \frac{qz^2}{2EI}$$

$$v(z) = \frac{qz^4}{24EI} - \frac{qlz^3}{6EI} + \frac{ql^3z}{3EI}$$

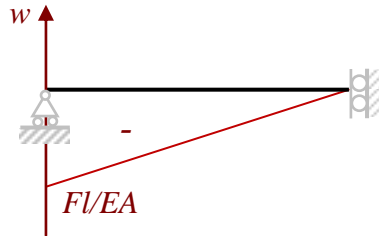
4. Rotazioni $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = -v'(z) = -\frac{qz^3}{6EI} + \frac{qlz^2}{2EI} - \frac{ql^3}{3EI}$$

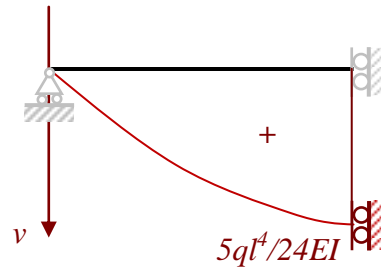
$$\varphi_a = \varphi(0) = -\frac{ql^3}{3EI} \quad (\text{verso orario})$$

NOTA: nelle equazioni precedenti $A=a^2$, $I=I_x=a^4/12$

5. Diagrammi $w(z)$ e $v(z)$



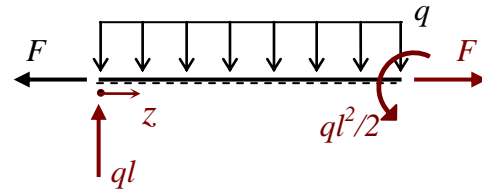
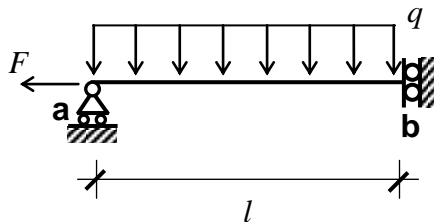
spostamenti assiali
(da destra verso sinistra)



spostamenti trasversali
(verso il basso)

Problema 2 (quesito facoltativo)

1. Sistema effettivo



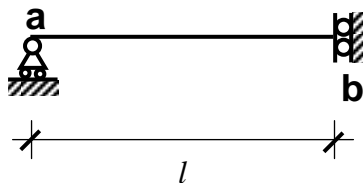
$$0 \leq z \leq l$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$N^{\text{eff}}(z) = F$$

$$M^{\text{eff}}(z) = qlz - qz^2/2$$

2. Sistema virtuale



$$\begin{array}{ll} 0 \leq z \leq l & N^v(z) = 0 \\ 0 \leq z \leq l & M^v(z) = z \end{array}$$

3. Equazione dei Lavori Virtuali

$$L_e^v = 1 \cdot v_b$$

$$L_i^v = \int_0^l M^v \frac{M_{eff}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l qlz^2 dz - \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{qz^3}{2} dz = \frac{5ql^4}{24EI}$$

$$L_e^v = L_i^v \Rightarrow v_b = \frac{5ql^4}{24EI}$$

Quest'ultima espressione coincide con il valore trovato precedentemente.

Problema 3

1. Coordinate baricentro

$$x_G = 0$$

$$y_G = 9,44\text{cm}$$

2. Momenti principali d'inerzia

$$I_x = 725,95\text{cm}^4$$

$$I_y = 5984,65\text{cm}^4$$

3. Carico critico euleriano

$$P_{cr} = 234,86\text{kN}$$