UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “G. D’ANNUNZIO” DI CHIETI-PESCARA

FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

❖

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA, CORSI DI LAUREA TRIENNALI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI E **TEORIA DELLE STRUTTURE** (Canali **B**,**C**)

a.a. 2007-2008

Docenti: ❒ M. **VASTA**, ❒ P. **CASINI**

Seconda prova d’esonero del 13.12.2007

Tema A

*I quesiti **4, 5, 6** valgono come prova per l’esame del modulo di Teoria delle Strutture. Il quesito **7** è facoltativo.*

La mensola in Fig. **1** è realizzata con una trave di acciaio la cui sezione è riportata in Fig. **2**. Lo spessore della sezione è costante e pari a s; il carico q è diretto come in Fig. **2** e la forza normale ql passa per il baricentro.

1. Si disegni lo schema di struttura libera e i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.
2. Si studi lo stato di tensione nella sezione ritenuta più sollecitata, determinando leggi analitiche e diagrammi delle tensioni normali e tangenziali.
3. In corrispondenza del punto Q di tale sezione effettuare la verifica di resistenza con il *criterio di von Mises*.
4. Classificare lo stato tensionale in Q, determinando il tensore della tensione, gli invarianti della tensione e le tensioni principali. Rappresentare graficamente lo stato tensionale in Q attraverso i cerchi di Mohr e determinare graficamente tensioni e direzioni principali.
5. Nel punto Q, determinare le componenti della deformazione ($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$) e le deformazioni principali ($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$). Scrivere il tensore della deformazione nel sistema di riferimento x,y,z e nel sistema di riferimento principale. Mostrare che la dilatazione cubica ε_v non dipende dal sistema di riferimento in cui si calcola il tensore della deformazione. Nel punto Q il volume di un elemento infinitesimo diminuisce o aumenta?
6. Effettuare le verifiche di resistenza in Q utilizzando i seguenti criteri: Galileo-Rankine, Saint Venant-Grashof, Tresca, von Mises.
7. Calcolare la snellezza della trave e il carico critico euleriano della trave in assenza del carico distribuito q. In caso di collasso per instabilità la trave si inflette nel piano yz o nel piano xz ? Motivare la risposta.

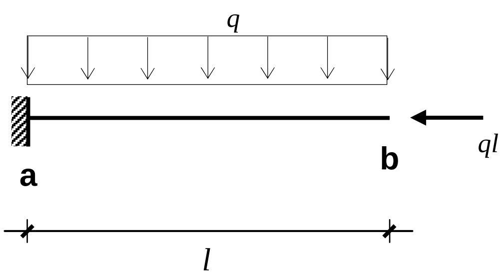


Fig. 1 *Schema statico*

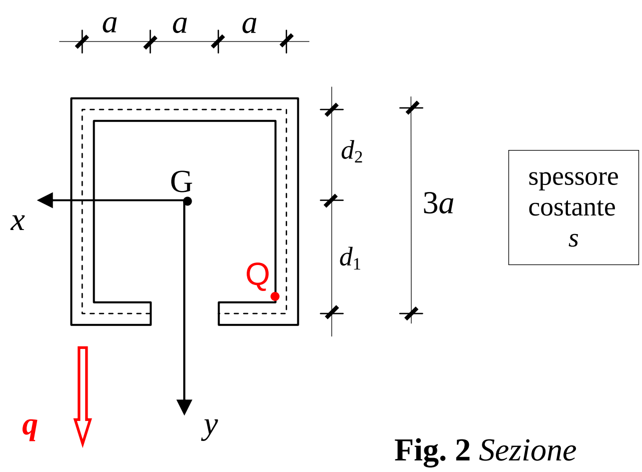


Fig. 2 *Sezione*

DATI. *Schema statico*: l=300 cm, q=1 kN/m=0.01 kN/cm.

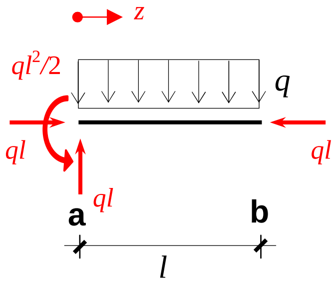
Sezione: a=5 cm, s=0.5 cm, A=27.5 cm^2, I_x=971.8 cm^4, I_y=1120.1 cm^4 d_1=8.2 cm, d_2=6.8 cm

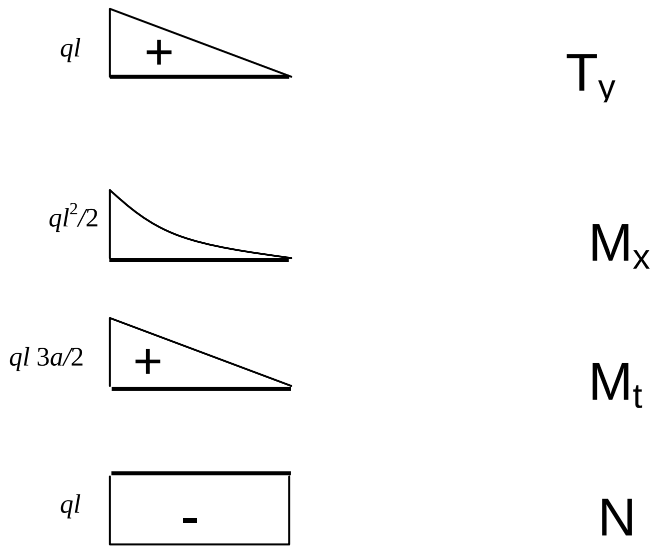
Materiale: elastico, lineare, omogeneo, isotropo: E=21000 kN/cm^2, ν=0.3, G=8100 kN/cm^2, σ_0=23.5 kN/cm^2.

COGNOME..	
NOME..	
MAT.	

Soluzione Tema A

1) Reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione





$$\begin{cases} N = -ql \\ T_y(z) = ql - qz \\ M_x(z) = -\dfrac{ql^2}{2} + qlz - \dfrac{qz^2}{2} \\ M_t(z) = T_y \cdot \dfrac{3}{2} a \ \ (\mathit{antiorario\ \ se}\ \ T_y > 0) \end{cases}$$

2) Stato tensionale nella sezione più sollecitata (incastro)

2_a. Inerzia torsionale della sezione

$$I_t = \frac{1}{3}(11a)\cdot s^3 = 2.29\,\text{cm}^4$$

2_b. Sollecitazioni agenti nella sezione di incastro

N=-*ql*=-3 kN, T_y=*ql*=3 kN, M_x= $-\dfrac{ql^2}{2} = -0.01\cdot\dfrac{300^2}{2} = -450\,\text{kN cm}$,

M_t= $ql\cdot\dfrac{3}{2}a = 0.01\cdot 300\cdot 7.5 = 22.5\ \ \text{kN cm}$ (*antiorario*)

2_c. Tensioni normali σ_z (*vedi figura alla pag. seguente*)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y = \frac{-3}{27.5} + \frac{-450}{971.8}y = -0.109 - 0.463y \ \ [\text{kN/cm}^2]$$

<u>asse neutro</u> : $\sigma_z = 0 \ \Rightarrow \quad y = -0.23\ \text{cm}$

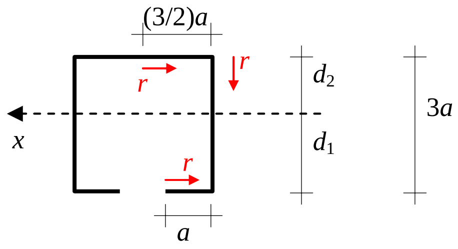
$\sigma(A) = \sigma_z(y = -d_2) = 3.04\ \text{kN/cm}^2$

$\sigma(B) = \sigma_z(y = d_1) = -3.91\ \text{kN/cm}^2$

$\sigma(Q) = \sigma_z\left(d_1 - \frac{s}{2}\right) \cong \sigma_z\left(d_1\right) = \sigma(B) = -3.91\ \text{kN/cm}^2$

2$_d$. Tensioni tangenziali dovute al taglio

(*vedi figura in fondo pagina*)



$$\tau(r)=\frac{T_y\,S_x^*(r)}{I_x s}=\frac{3\,S_x^*(r)}{971.8\cdot 0.5}=0.00617\cdot S_x^*(r)\,[\mathrm{kN/cm^2}]$$

$$\tau_1=\frac{T_y}{I_x\cancel{s}}\cancel{s}\cdot\frac{3}{2}a\cdot d_2=0.16\ \mathrm{kN/cm^2},\qquad \tau_2=\tau_1+\frac{T_y}{I_x\cancel{s}}3a\cancel{s}\left(d_2-\frac{3a}{2}\right)=0.13\ \mathrm{kN/cm^2}$$

$$\tau_2=\frac{T_y}{I_x\cancel{s}}a\cancel{s}d_1=0.13\ \mathrm{kN/cm^2},$$

$$\tau_{taglio}(Q)\cong\tau_2=0.13\ \mathrm{kN/cm^2}$$

τ_{taglio}(A)= τ_{taglio}(B)=0

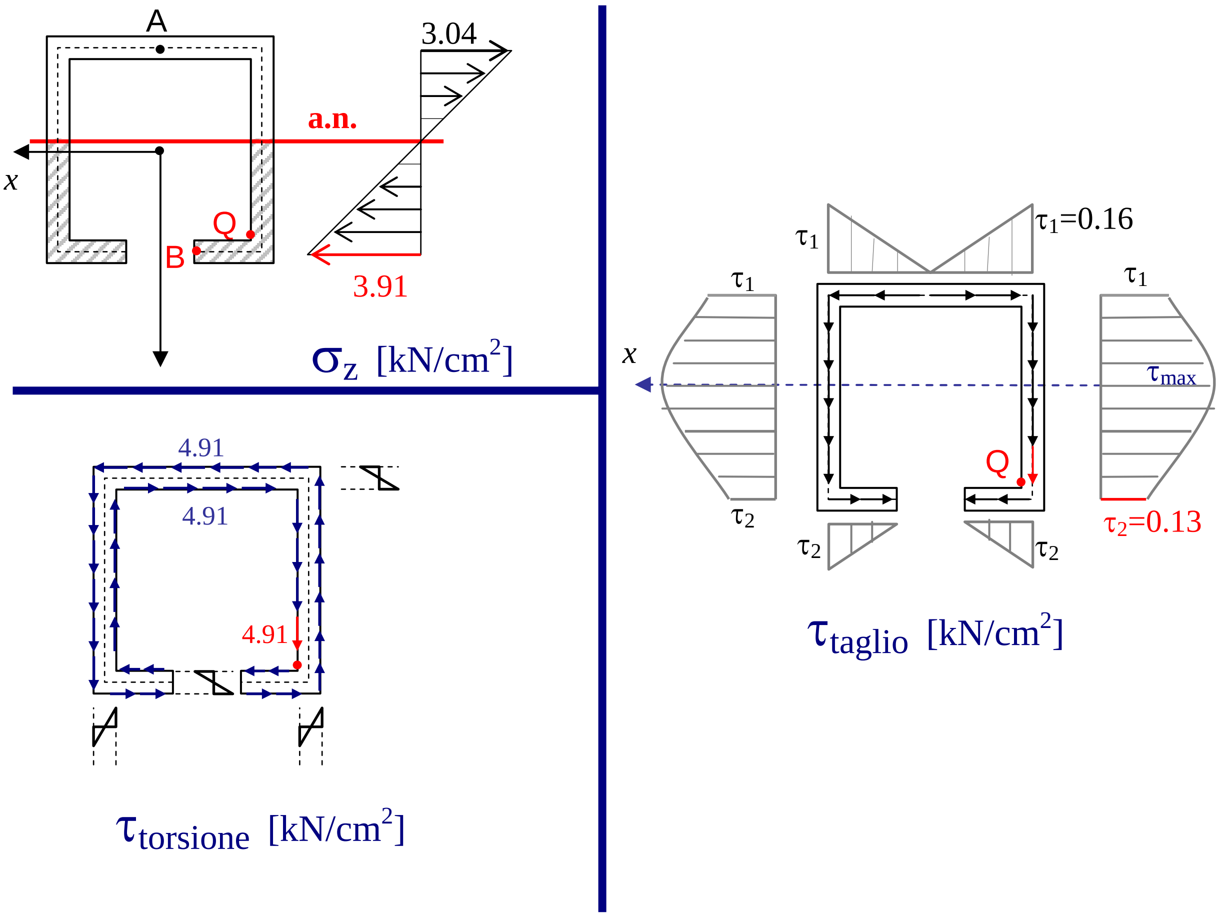
2$_e$. Tensioni tangenziali dovute alla torsione (M_t antiorario)

$$\tau_i^{max}=\frac{M_{ti}}{I_{ti}}s_i=\frac{M_t}{I_t}s=\frac{22.5}{2.29}0.5=4.91\,\mathrm{kN/cm^2}\ \text{(nullo sulla linea media)}$$

τ_{tors}(Q)= 4.91 kN/cm^2 (diretta verso il basso)

τ_{tors}(A)= τ_{tors}(B)=0

2$_f$. Diagrammi dello stato tensionale (valori in kN/cm^2)

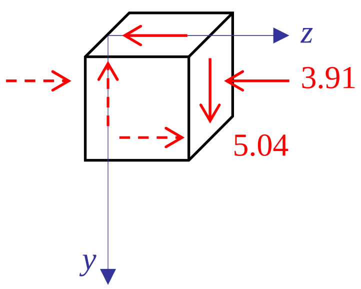


3) Verifica nel punto Q (von Mises)

in Q si ha:
$\sigma(Q) \cong \sigma(A)$ =- 3.91 kN/cm^2, τ_{TOT} = 0.13+4.91 = 5.04 kN/cm^2 (verso il basso)

von Mises $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2} = \sqrt{(-3.91)^2 + 3\cdot 5.04^2} = 9.56\,\text{kN/cm}^2 < \sigma_0$ Verifica soddisfatta

4) Stato tensionale in Q (kN/cm^2)



σ_z= -3.91 kN/cm^2
τ_{zy}= 5.04 kN/cm^2
σ_x= 0
σ_y=0
τ_{xy}=0
τ_{zx}= 0

Tensore della Tensione in Q e invarianti (unità di misura: kN e cm)

$$\mathrm{T(Q)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.04 \\ 0 & 5.04 & -3.91 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3.91 \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -25.4 \\ I_3 = \det(\mathrm{T}) = 0 \end{cases}$$

Equazione Caratteristica (unità di misura: kN e cm)

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \qquad \sigma_n^3 + 3.91\sigma_n^2 - 25.4\sigma_n = 0$$

Tensioni principali

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = 3.45\ \text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_2 = \frac{I_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = -7.36\ \text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_3 = 0$$

Classificazione dello stato tensionale in Q

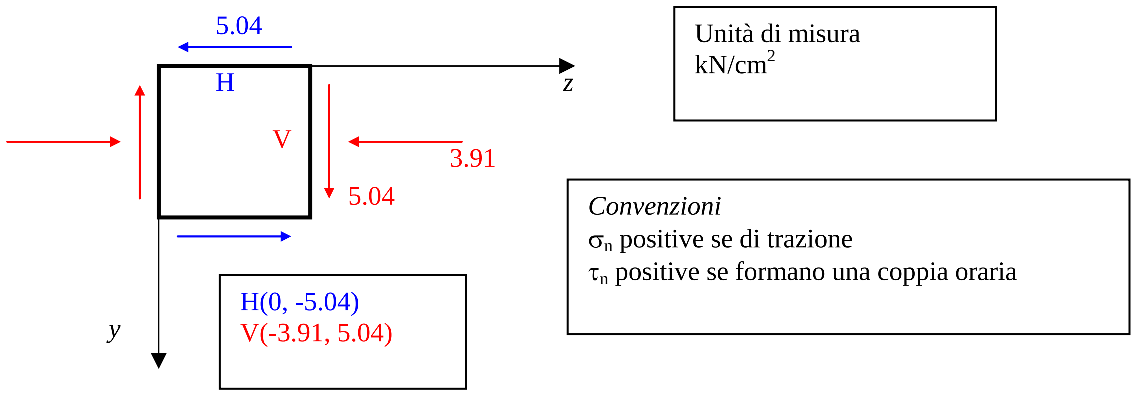
Lo stato tensionale in Q è piano (I_3=0) con direzione principale associata a σ_3=0 coincidente con *x*.
Il cerchio di Mohr C_3 relativo alla direzione principale *x*, ha centro K_3 e raggio *R* espressi da:

$$K_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right) \equiv (-1.95, 0) \qquad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 5.4 \qquad (\text{kN/cm}^2)$$

Cerchio di Mohr C_3 in Q

Stato tensionale in Q

σ_z=-3.91 kN/cm^2, τ_{zy}=5.04 kN/cm^2, σ_x= σ_y=τ_{xy} =τ_{xz}=0,



Caratteristiche del cerchio di Mohr (kN/cm^2)

$$K_3 = \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}, 0\right) = \left(\frac{0 - 3.91}{2}, 0\right) = (-1.95, 0) \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{0 + 3.91}{2}\right)^2 + 5.04^2} = 5.4$$

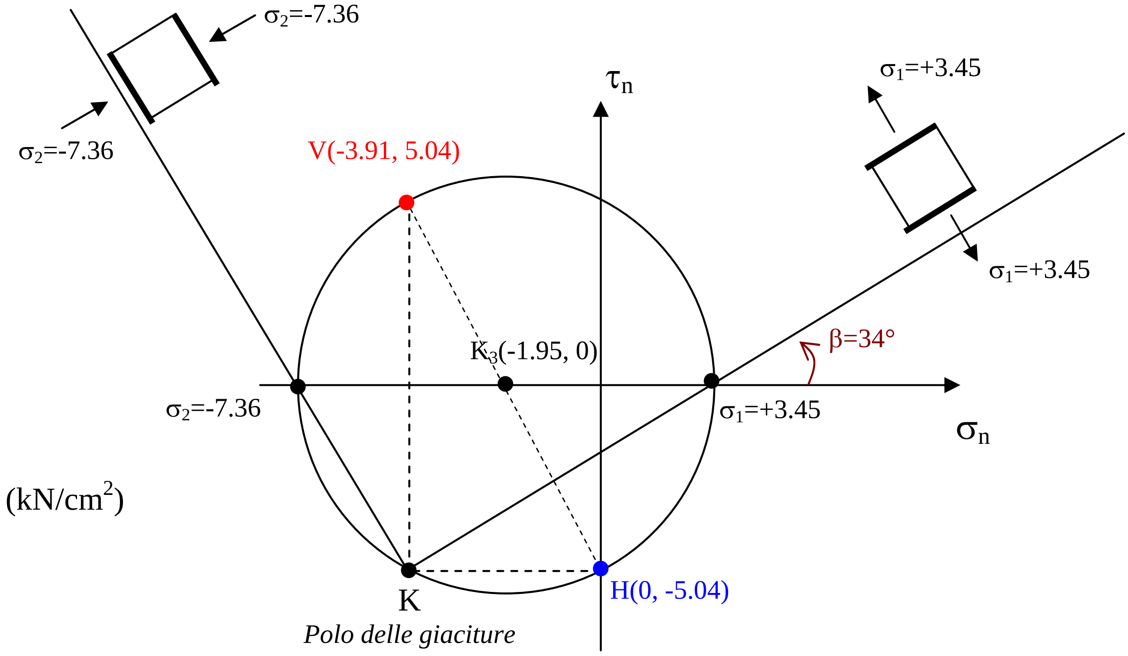
$$\beta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_y - \sigma_z}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2 \cdot 5.04}{0 + 3.91}\right) \cong 34°$$

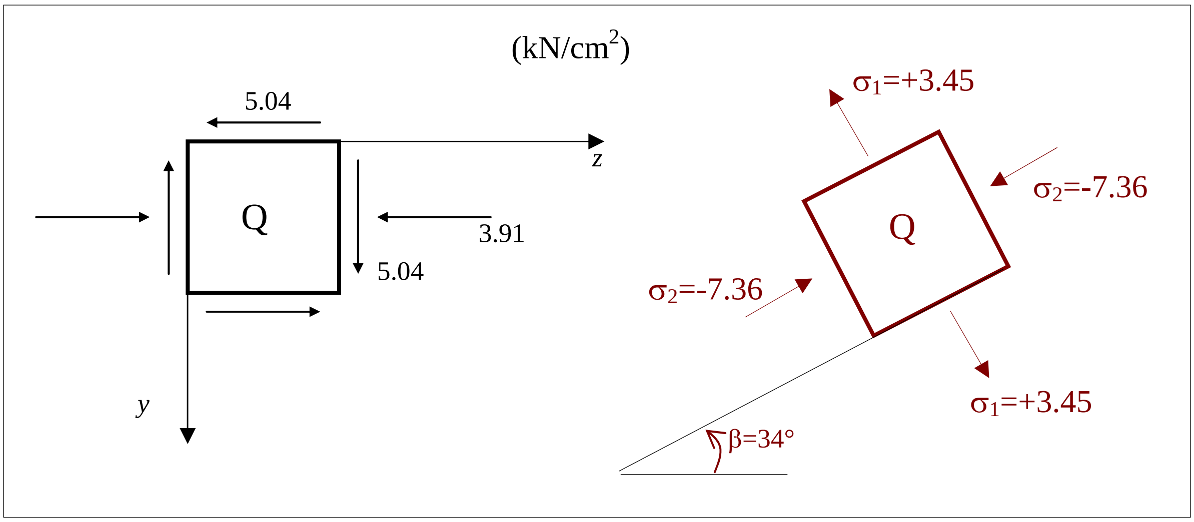
Tensioni principali

σ_1=x_{k3}+R=+3.45 kN/cm^2

σ_1=x_{k3}-R=-7.36 kN/cm^2

Cerchio di Mohr C_3, nel punto Q1





5) Stato deformativo in Q

Materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo: leggi generalizzate di Hooke

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = 5.585 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = 5.585 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \dfrac{\sigma_z}{E} = -1.862 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} = 6.222 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento x,y,z

$$\varepsilon(\mathrm{Q}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.585 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 5.585 \cdot 10^{-5} & 3.111 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 3.111 \cdot 10^{-4} & -1.862 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Deformazioni principali

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_2 = 2.695 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_1 = -3.998 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = 5.585 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

Nota: $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$ essendo *x* la terza direz. principale

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento principale

$$\varepsilon(\mathrm{Q}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.626 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -6.929 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 5.585 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Dilatazione cubica

$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -7.448\ 10^{-5}$

(essendo $\varepsilon_v = \Delta V / V_0$ negativo, il volume dell'elemento intorno a Q *diminuisce*)

6) Verifiche di resistenza in Q

Caratteristiche del materiale
σ_0=23.5MPa
$\varepsilon_0 = \sigma_0/E = 1.12\ 10^{-3}$

Galileo-Rankine
$\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_0$ OK

Saint Venant-Grashof
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < \varepsilon_0$ OK

von Mises
$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$ =9.56 kN/cm^2
$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK

Tresca
$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_2$ =10.81 kN/cm^2
$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK

7) Stabilità

Essendo $I_x < I_y$ ($\rho_x < \rho_y$) il piano ‘debole’ in cui si ha massima snellezza è il piano *yz* cioè il piano in cui la trave ha rigidezza flessionale EI_x minima.

Lunghezza libera di inflessione
$l_0 = 2l = 600$ cm

raggio d’inerzia

$$\rho = \min(\rho_x, \rho_y) = \rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 5.944 \text{ cm}$$

snellezza

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{600}{5.944} = 100.93$$

snellezza limite

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = 93.91$$

Carico critico
Essendo $\lambda > \lambda_0$ la trave è snella e il carico critico euleriano vale:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l_0^2} = 559.5 \text{ kN}$$