Soluzioni Tema C

Problema 1

Per risolvere il problema, scegliamo i sistemi di riferimento locali come nella figura seguente dove i versi positivi dell'asse y locale sono evidenziati con un tratto di linea punteggiato:

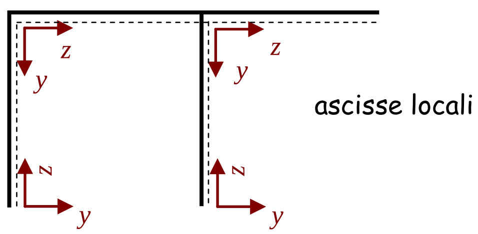


Fig. **1**

L'asta **ab** è soggetta ad una variazione termica uniforme che induce una dilatazione assiale termica pari a:

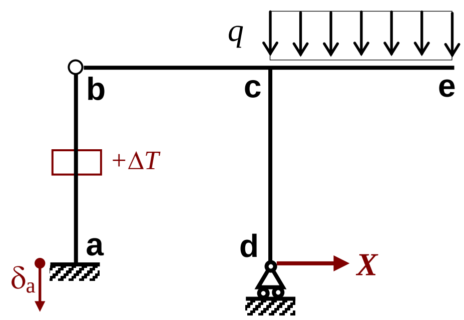
$$\varepsilon_T = +\alpha\Delta T \tag{1}$$

positiva trattandosi di un riscaldamento uniforme dell'asta.

1. *Sistema isostatico principale e incognita iperstatica*

$w_d(X)=0$

Equazione di congruenza



Sistema Isostatico Equivalente

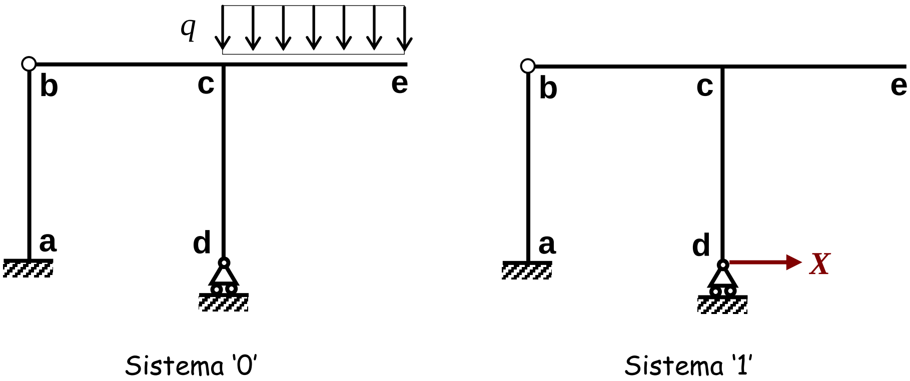


Fig. **2**

2. *Studio del sistema '0'*

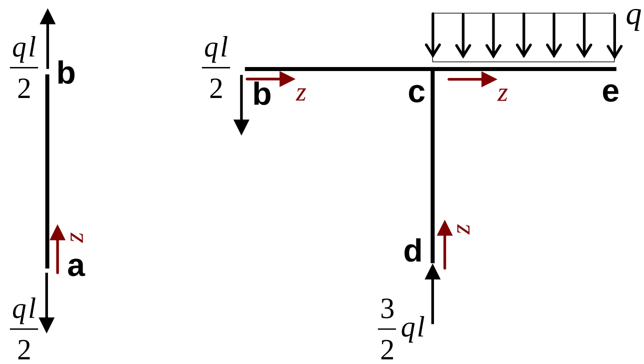


Fig. **3**

Tratto		N_0	T_0	M_0
ab	$0 \le z \le l$	*ql/2*	0	0
bc	$0 \le z \le l$	0	*-ql/2*	*-qlz/2*
dc	$0 \le z \le l$	*-3ql/2*	0	0
ce	$0 \le z \le l$	0	*ql-qz*	*-ql(l+z)/2-* *qz^2/2+3qlz/2*

I relativi diagrammi sono riportati nella figura seguente.

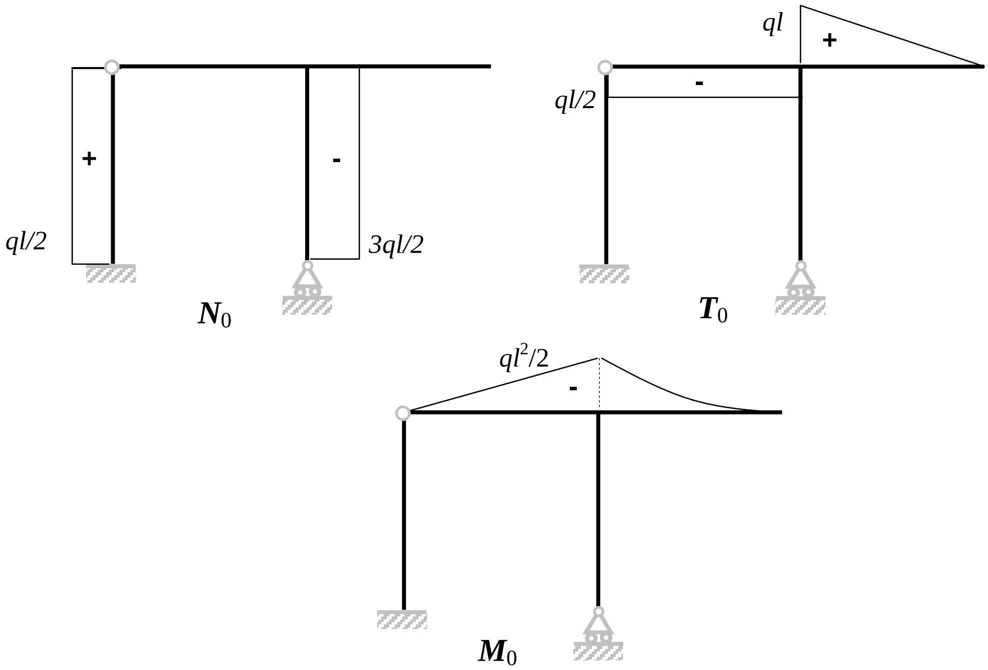


Fig. **4**

3. Studio del sistema ‘1’

Come al solito, il sistema ‘1’ si studia scegliendo gli stessi sistemi di riferimento locali fissati all’inizio.

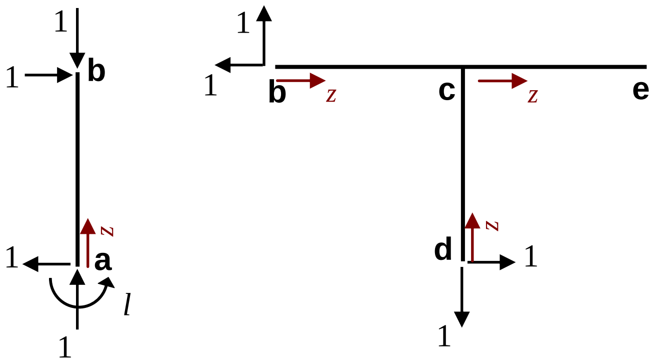
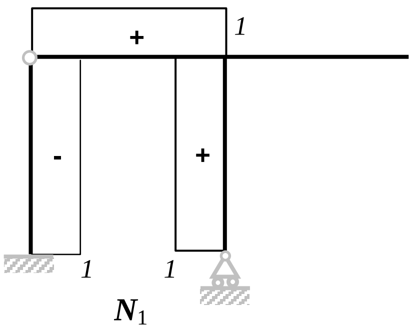
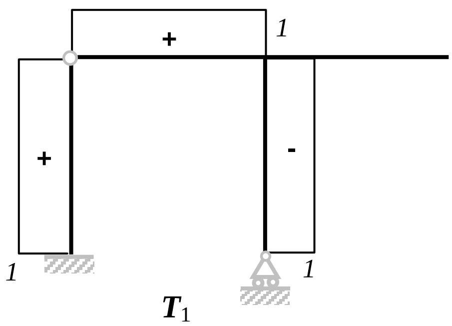


Fig. **5**

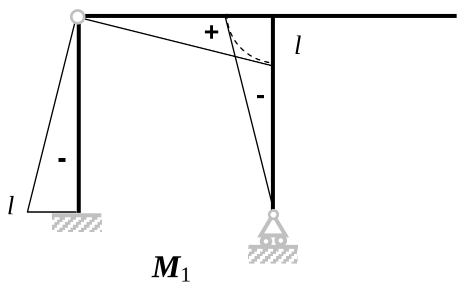
Tratto		N_1	T_1	M_1
ab	$0 \le z \le l$	-1	1	$z-l$
bc	$0 \le z \le l$	1	1	z
dc	$0 \le z \le l$	1	-1	$-z$
ce	$0 \le z \le l$	0	0	0



N_1



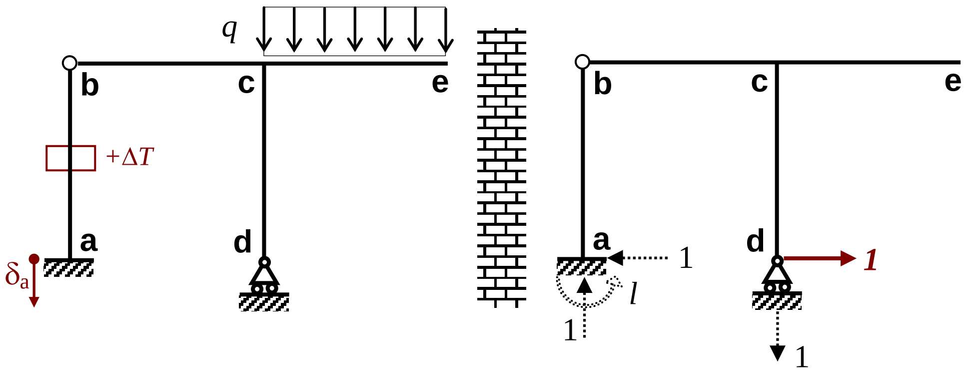
T_1



M_1

4. Equazione dei Lavori Virtuali $L_e^v = L_i^v$

La figura seguente mette a confronto il sistema effettivo ed il sistema virtuale.



sistema effettivo (spostamenti)

Fig. **7**

sistema '1' (forze)

Per quanto riguarda il Lavoro Virtuale Esterno si ha:

$$L_e^v = -1 \cdot \delta_a \tag{2}$$

Per quanto riguarda il Lavoro Virtuale Interno, poiché EA→∞ e la variazione termica uniforme agisce solo nel tratto **ab** e poiché il tratto **ce** è scarico nel sistema '1', si ha:

$$L_i^v = \int_{tratto\,ab} N_1 \varepsilon_T dz + \int_{tratto\,ab} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz + \int_{tratto\,bc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz + \int_{tratto\,dc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz$$

I precedenti integrali si sviluppano come segue:

$$\int_{tratto\ ab} N_1 \varepsilon_T dz = \int_0^l N_1 \varepsilon_T \, dz = \int_0^l (-1)\varepsilon_T \, dz = -\varepsilon_T \, l = -\alpha \Delta T \, l \tag{3a}$$

$$\int_{tratto\ ab} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \tfrac{M_0 + XM_1}{EI} dz = \tfrac{1}{EI} \int_0^l \cancel{M_1} M_0 dz + \tfrac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz = \tfrac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \tag{3b}$$

$$\int_{tratto\ bc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \tfrac{M_0 + XM_1}{EI} dz = \tfrac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_0 dz + \tfrac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \tag{4}$$

$$\int_{tratto\ dc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = \int_0^l M_1 \tfrac{M_0 + XM_1}{EI} dz = \tfrac{1}{EI} \int_0^l M_1 \cancel{M_0} dz + \tfrac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz = \tfrac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz \tag{5}$$

dove:

Tratto	$M_1 M_0$	M_1^2
ab $0 \leq z \leq l$	0	z^2+l^2-2zl
bc $0 \leq z \leq l$	$-qlz^2/2$	z^2
dc $0 \leq z \leq l$	0	z^2

Tratto	$\int M_1 M_0$	$\int M_1^2$
ab $0 \leq z \leq l$	0	$\frac{1}{3} l^3$
bc $0 \leq z \leq l$	$-\frac{1}{6} q l^4$	$\frac{1}{3} l^3$
dc $0 \leq z \leq l$	0	$\frac{1}{3} l^3$

Le equazioni (3)-(5) si esplicitano dunque come segue:

$$\int_{tratto\ ab} N_1 \varepsilon_T dz = -\alpha \Delta T\, l \tag{6a}$$

$$\int_{tratto\ ab} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = X \frac{l^3}{3EI} \tag{6b}$$

$$\int_{tratto\ bc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = -\frac{ql^4}{6EI} + X \frac{l^3}{3EI} \tag{7}$$

$$\int_{tratto\ dc} M_1 \frac{M^{eff}}{EI} dz = X \frac{l^3}{3EI} \tag{8}$$

Il Lavoro Interno Virtuale è la somma dei contribuiti (6)-(8):

$$L_i^v = -\frac{ql^4}{6EI} + X \frac{l^3}{EI} - \alpha \Delta T\, l \tag{9}$$

L'equazione dei Lavori Virtuali si scrive dunque:

$$-\frac{ql^4}{6EI}+X\frac{l^3}{EI}-\alpha\Delta T\,l=-\delta_a \tag{10}$$

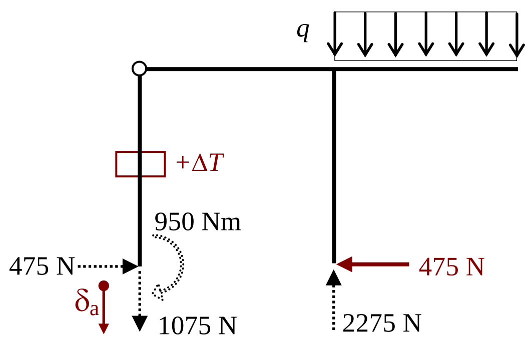
da cui finalmente:

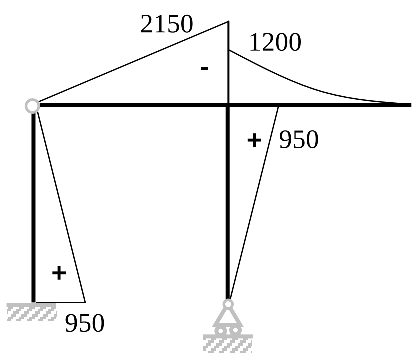
$$X=\frac{1}{6}ql-\frac{EI}{l^3}\delta_a+\frac{EI}{l^2}\alpha\Delta T \tag{11}$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$X = -475N \tag{12}$$

5. Reazioni e diagrammi effettivi

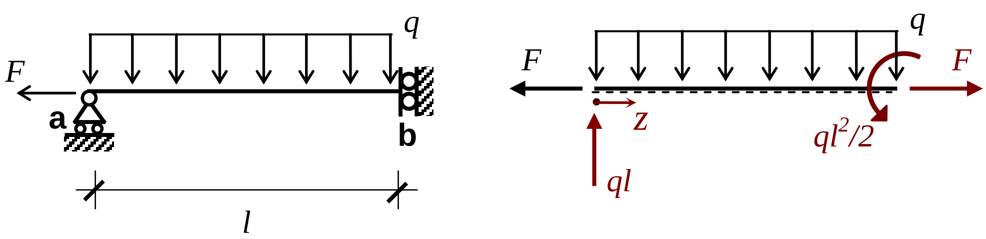




$\boldsymbol{M}^{\text{eff}}$ [Nm]

Problema 2

1. Caratteristiche della sollecitazione



$0 \le z \le l$	$N(z) = F$
$0 \le z \le l$	$T(z) = ql - qz$
$0 \le z \le l$	$M(z) = qlz - qz^2/2$

2. Spostamenti assiali w(z)

$$N(z) = EAw'(z) \Rightarrow \quad w'(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$w'(z) = \frac{F}{EA}$$

$$w(z) = \frac{F}{EA} z + a_1$$

per determinare la costante a1 è necessaria una condizione sugli spostamenti assiali:

$$w_b = 0 \quad \Rightarrow \quad w(l) = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = -\frac{F}{EA} l$$

pertanto deformazioni e spostamenti assiali sono forniti dalle seguenti equazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(z) &= w'(z) = \frac{F}{EA} \\ w(z) &= -\frac{F}{EA}(l - z) \end{aligned}}$$

3. Spostamenti flessionali v(z)

$$M(z) = -EIv''(z) \Rightarrow \quad v''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

$$v''(z) = -\frac{1}{EI}\left(qlz - \frac{qz^2}{2}\right)$$

$$v'(z) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{qlz^2}{2} - \frac{qz^3}{6}\right) + c_1$$

$$v(z) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{qlz^3}{6} - \frac{qz^4}{24}\right) + c_1 z + c_2$$

Le due costanti di integrazione si ricavano con le seguenti due condizioni al contorno:

$$v_a = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\varphi_b = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(l) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{ql^3}{3EI}$$

pertanto curvatura e spostamenti trasversali sono forniti dalle seguenti equazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} \chi(z) &= -v''(z) = \frac{qlz}{EI} - \frac{qz^2}{2EI} \\ v(z) &= \frac{qz^4}{24EI} - \frac{qlz^3}{6EI} + \frac{ql^3 z}{3EI} \end{aligned}}$$

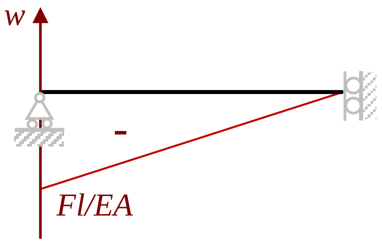
4. Rotazioni φ(z)

$$\varphi(z) = -v'(z) = -\frac{qz^3}{6EI} + \frac{qlz^2}{2EI} - \frac{ql^3}{3EI}$$

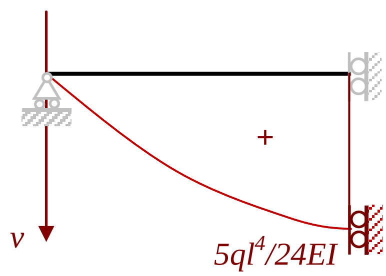
$$\varphi_a = \varphi(0) = -\frac{ql^3}{3EI} \quad (verso \ \ orario)$$

NOTA: nelle equazioni precedenti $A=a^2$, $I=I_x=a^4/12$

5. Diagrammi w(z) e v(z)



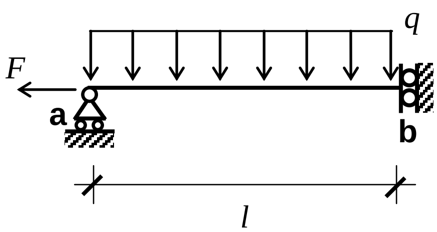
spostamenti assiali
(da destra verso sinistra)

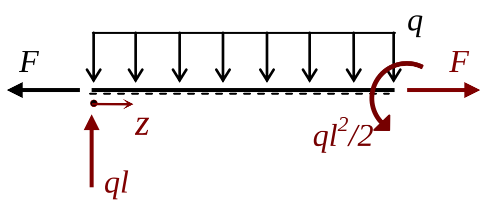


spostamenti trasversali
(verso il basso)

Problema 2 (quesito facoltativo)

1. Sistema effettivo

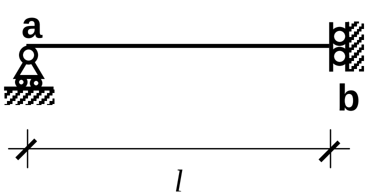


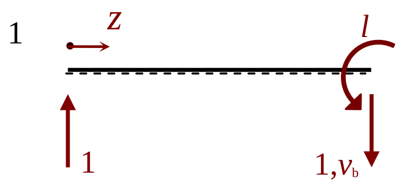


$0 \leq z \leq l$ $\qquad N^{eff}(z) = F$

$0 \leq z \leq l$ $\qquad M^{eff}(z) = qlz - qz^2/2$

2. Sistema virtuale





$0 \leq z \leq l$ $\qquad N^{v}(z) = 0$

$0 \leq z \leq l$ $\qquad M^{v}(z) = z$

3. Equazione dei Lavori Virtuali

$$L_e^v = 1 \cdot v_b$$

$$L_i^v = \int_0^l M^v \frac{M_{eff}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l qlz^2 \, dz - \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{qz^3}{2} dz = \frac{5ql^4}{24EI}$$

$$L_e^v = L_i^v \quad \Rightarrow \boxed{v_b = \frac{5ql^4}{24EI}}$$

Quest'ultima espressione coincide con il valore trovato precedentemente.

Problema 3

1. Coordinate baricentro

$$x_G = 0$$
$$y_G = 9{,}44 cm$$

2. Momenti principali d'inerzia

$$I_x = 725{,}95 cm^4$$
$$I_y = 5984{,}65 cm^4$$

3. Carico critico euleriano

$$P_{CR} = 234{,}86 kN$$