UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "G. D'ANNUNZIO" DI CHIETI-PESCARA
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

❖

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA, CORSI DI LAUREA TRIENNALI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI E **TEORIA DELLE STRUTTURE** (Canali **B**,**C**)

a.a. 2008-2009

Docenti: ❐ M. **VASTA**, ❐ P. **CASINI**

Seconda prova d'esonero del 17.12.2008

Tema A

*I quesiti **4, 5, 6** valgono come prova per l'esame del modulo di Teoria delle Strutture. Il quesito **7** è facoltativo.*

La struttura in Fig. **1** è realizzata con una trave di acciaio la cui sezione è riportata in Fig. **2**. Lo spessore della sezione è costante e pari a *s*; la forza normale 5*F* passa per il baricentro.

1. Si disegni lo schema di struttura libera e i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.
2. Si studi lo stato di tensione nella sezione ritenuta più sollecitata, determinando leggi analitiche e diagrammi delle tensioni normali e tangenziali.
3. In corrispondenza del punto Q di tale sezione effettuare la verifica di resistenza con il *criterio di von Mises*.
4. Classificare lo stato tensionale in Q, determinando il tensore della tensione, gli invarianti della tensione e le tensioni principali. Rappresentare graficamente lo stato tensionale in Q attraverso i cerchi di Mohr e determinare graficamente tensioni e direzioni principali.
5. Nel punto Q, determinare le componenti della deformazione ($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$) e le deformazioni principali ($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$). Scrivere il tensore della deformazione nel sistema di riferimento *x,y,z* e nel sistema di riferimento principale. Mostrare che la dilatazione cubica ε_v non dipende dal sistema di riferimento in cui si calcola il tensore della deformazione. Nel punto Q il volume di un elemento infinitesimo diminuisce o aumenta?
6. Effettuare le verifiche di resistenza in Q utilizzando i seguenti criteri: Galileo-Rankine, Saint Venant-Grashof, Tresca, von Mises.
7. Calcolare la snellezza della trave e il carico critico euleriano della trave in assenza del carico trasversale. In caso di collasso per instabilità la trave si inflette nel piano *yz* o nel piano *xz* ? Motivare la risposta.

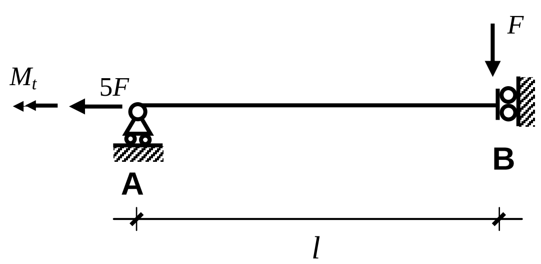


Fig. 1 *Schema statico*

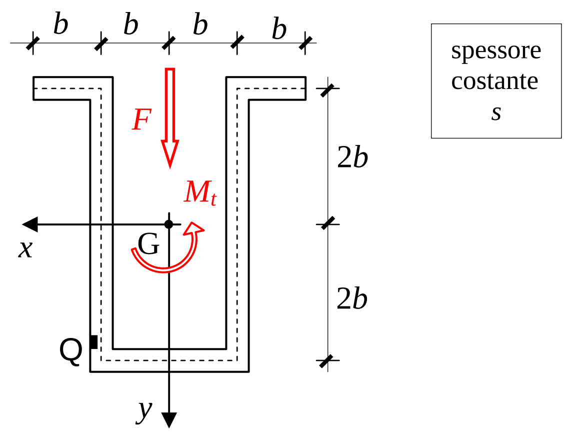


Fig. 2 *Sezione*

DATI. <u>*Schema statico*</u>: l=300 cm, F=3.0 kN, M_t=20 kNcm (antiorario).

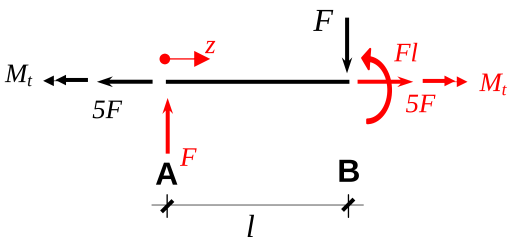
<u>*Sezione*</u>: b=5 cm, s=0.5 cm, $A=12bs$= 30 cm², $I_x=\frac{80}{3}b^3s$ =1666.7 cm⁴, $I_y=\frac{40}{3}b^3s$ =833.33 cm⁴

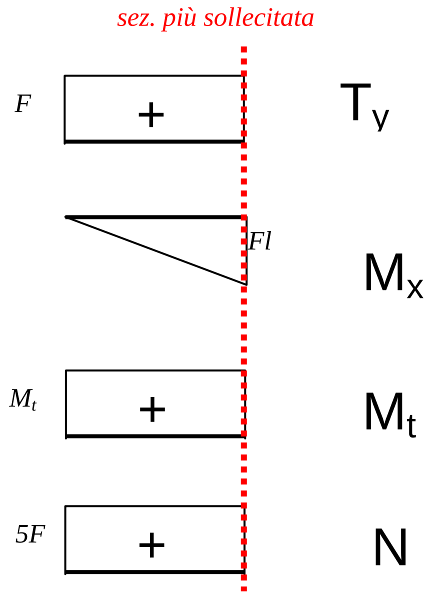
<u>*Materiale*</u>: elastico, lineare, omogeneo, isotropo: E=21000 kN/cm², ν=0.3, G=8100 kN/cm², σ_0=23.5 kN/cm².

COGNOME...	
NOME...	
MAT.	

Soluzione Tema A

1) Reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione





$$\begin{cases} N = 5F \\ T_y(z) = F \\ M_x(z) = Fz \\ M_t(z) = M_t \ (antiorario) \end{cases}$$

2) Stato tensionale nella sezione più sollecitata (incastro)

2_a. Inerzia torsionale della sezione

$$I_t = \frac{1}{3}(12b)\cdot s^3 = 4bs^3 = 2.5\,\text{cm}^4$$

2_b. Sollecitazioni agenti nella sezione di incastro

N=5*F*=15 kN, T_y=*F*=3 kN, M_x= $Fl = 900\,\text{kN cm}$,
M_t=20 kN cm (*antiorario*)

2_c. Tensioni normali σ_z (*vedi figura alla pag. seguente*)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y = \frac{15}{30} + \frac{900}{1666.7}y = 0.5 + 0.539y \ \ [\text{kN/cm}^2]$$

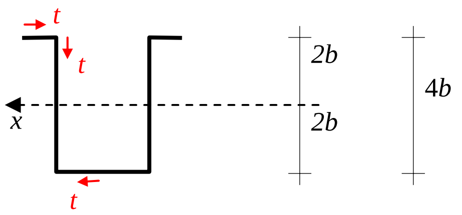
<u>asse neutro</u> : $\sigma_z = 0 \ \Rightarrow \quad y = -0.926\ \text{cm}$

$\sigma(A) = \sigma_z(y = -2b) = -4.9\ \text{kN/cm}^2$

$\sigma(B) = \sigma_z(y = 2b) = 5.9\ \text{kN/cm}^2$

$\sigma(Q) = \sigma_z\left(2a - \frac{s}{2}\right) \cong \sigma_z(2a) = \sigma(B) = 5.9\ \text{kN/cm}^2$

2$_d$. Tensioni tangenziali dovute al taglio
(*vedi figura in fondo pagina*)



$$\tau(t) = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s}$$

$$\tau_1 = \frac{T_y}{I_x \cancel{s}} \cancel{s} \cdot b \cdot 2b = \frac{3T_y}{40bs} = 0.09\ \text{kN/cm}^2, \qquad \tau_{\max} = \tau_1 + \frac{T_y}{I_x \cancel{s}} 2b\cancel{s}\left(2b - \frac{2b}{2}\right) = 2\tau_1 = 0.18\,\text{kN/cm}^2$$

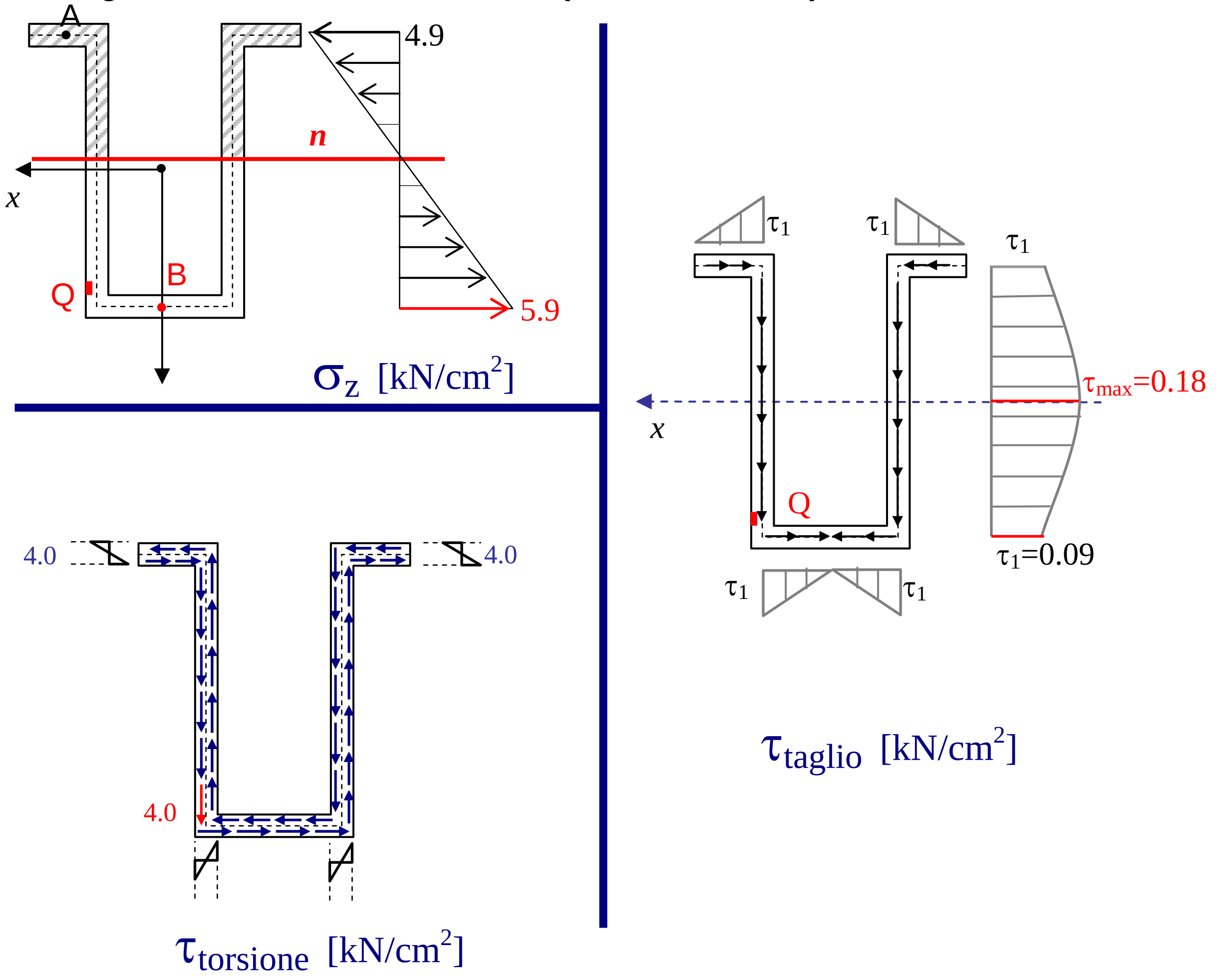
$$\tau_{taglio}(Q) \cong \tau_2 = 0.09\ \text{kN/cm}^2$$

2$_e$. Tensioni tangenziali dovute alla torsione (M_t antiorario)

$$\tau_i^{\max} = \frac{M_{ti}}{I_{ti}} s_i = \frac{M_t}{I_t} s = \frac{20}{2.5} 0.5 = 4\,\text{kN/cm}^2 \text{ (nullo sulla linea media)}$$

τ_{tors}(Q)= 4.0 kN/cm^2 (diretta verso il basso)

2$_f$. Diagrammi dello stato tensionale (valori in kN/cm^2)

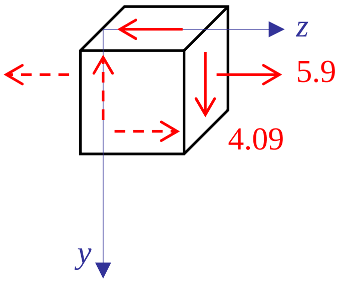


3) Verifica nel punto Q (von Mises)

in Q si ha:
$\sigma(Q) \cong \sigma(A)$ =5.9 kN/cm^2, τ_{TOT} = 0.09+4. = 4.09 kN/cm^2 (verticale verso il basso)

$\underline{\textit{von Mises}}\ \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2} = \sqrt{(5.9)^2 + 3\cdot 4.09^2} = 9.22\,\text{kN/cm}^2 < \sigma_0$ Verifica soddisfatta

4) Stato tensionale in Q (kN/cm^2)



σ_z= 5.9 kN/cm^2
τ_{zy}= 4.09 kN/cm^2
σ_x= 0
σ_y=0
τ_{xy}=0
τ_{zx}= 0

Tensore della Tensione in Q e invarianti (unità di misura: kN e cm)

$$\mathrm{T(Q)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.09 \\ 0 & 5.09 & 5.9 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 5.9 \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -16.73 \\ I_3 = \det(\mathrm{T}) = 0 \end{cases}$$

Equazione Caratteristica (unità di misura: kN e cm)

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \qquad\qquad \sigma_n^3 - 5.9\sigma_n^2 - 16.73\sigma_n = 0$$

Tensioni principali

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = 7.99\ \text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_2 = \frac{I_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = -2.09\ \text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_3 = 0$$

Classificazione dello stato tensionale in Q

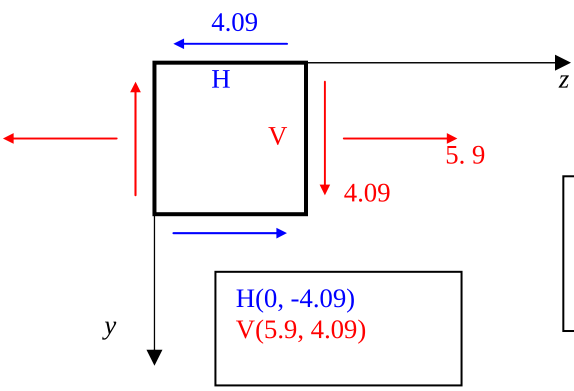
Lo stato tensionale in Q è piano (I_3=0) con direzione principale associata a σ_3=0 coincidente con *x*.
Il cerchio di Mohr C_3 relativo alla direzione principale *x*, ha centro K_3 e raggio *R* espressi da:

$$K_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right) \equiv (2.95, 0) \qquad\qquad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 5.04 \qquad\qquad (\text{kN/cm}^2)$$

Cerchio di Mohr C_3 in Q

Stato tensionale in Q

σ_z=5.9 kN/cm^2, τ_{zy}=4.09 kN/cm^2, σ_x= σ_y=τ_{xy} =τ_{xz}=0,



Unità di misura
kN/cm^2

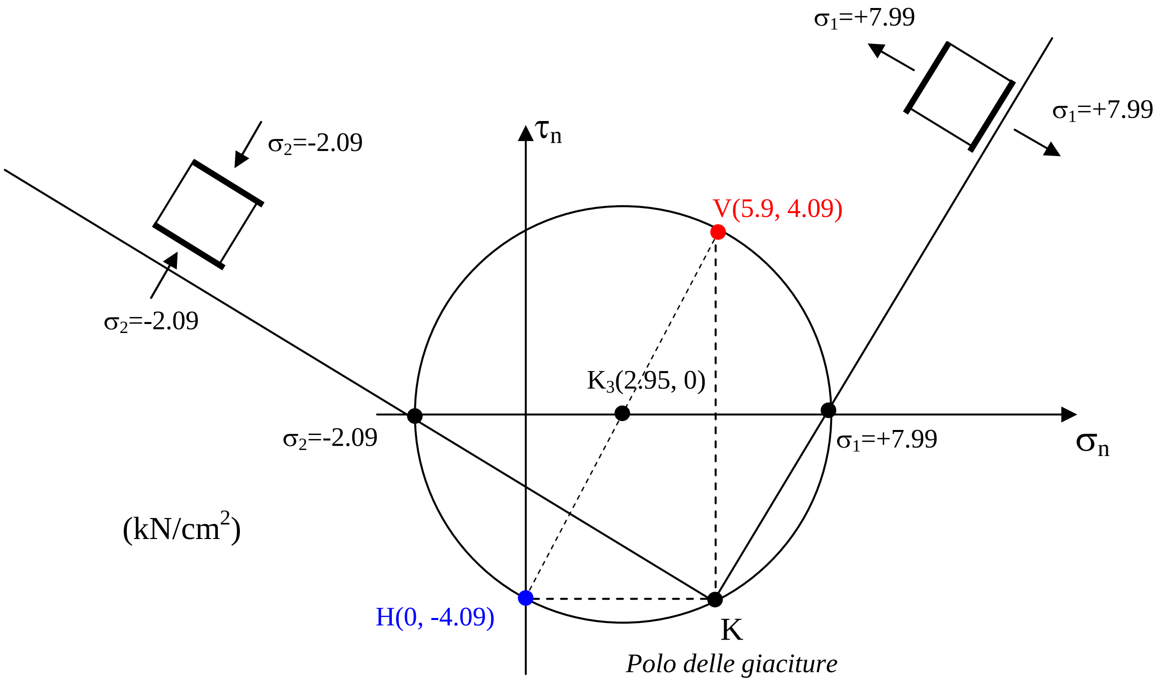
Convenzioni
σ_n positive se di trazione
τ_n positive se formano una coppia oraria

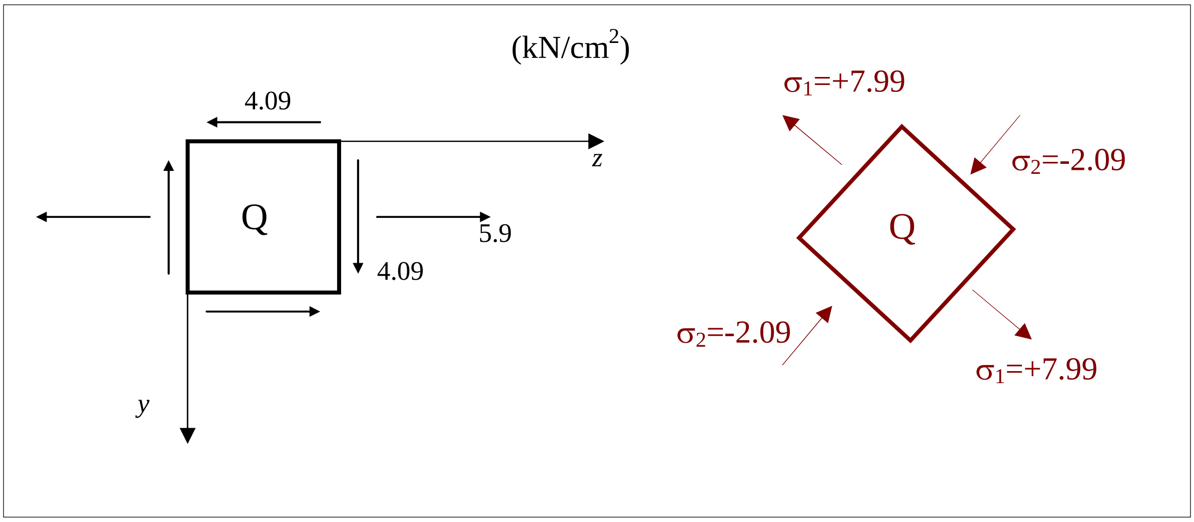
Caratteristiche del cerchio di Mohr   (kN/cm^2)

$$K_3 = \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}, 0\right) = \left(\frac{0 + 5.9}{2}, 0\right) = (2.95{,}0) \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{0 - 5.9}{2}\right)^2 + 4.09^2} = 5.04$$

Tensioni principali
σ_1=x_{k3}+R=+7.99 kN/cm^2
σ_1=x_{k3}-R=-2.09 kN/cm^2

Cerchio di Mohr C_3, nel punto Q1





5) Stato deformativo in Q

Materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo: leggi generalizzate di Hooke

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = -8.429\cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_z = -8.429\cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \dfrac{\sigma_z}{E} = 2.810\cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} = 5.049\cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento x,y,z

$$\varepsilon(\mathrm{Q}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.429\cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & -8.429\cdot 10^{-5} & 2.525\cdot 10^{-4} \\ 0 & 2.525\cdot 10^{-4} & 2.81\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Deformazioni principali

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_2 = 4.105\cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_1 = -2.138\cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = -8.429\cdot 10^{-5} \end{cases}$$

Nota: $\varepsilon_3=\varepsilon_x$ essendo *x* la terza direz. principale

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento principale

$$\varepsilon(\mathrm{Q}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.105\cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2.138\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -8.429\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Dilatazione cubica

$\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 =1.124\ 10^{-4}$

(essendo $\varepsilon_v=\Delta V/V_0$ positivo, il volume dell’elemento intorno a Q *aumenta*)

6) Verifiche di resistenza in Q

Caratteristiche del materiale
σ_0=23.5MPa
$\varepsilon_0 = \sigma_0/E = 1.12\ 10^{-3}$

Galileo-Rankine
$\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_0$ OK

Saint Venant-Grashof
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < \varepsilon_0$ OK

von Mises
$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$ =9.22 kN/cm^2
$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK

Tresca
$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_2$ =10.09 kN/cm^2
$\sigma_{id} < \sigma_0$ OK

7) Stabilità

Essendo $I_y < I_x$ ($\rho_y < \rho_x$) il piano 'debole' in cui si ha massima snellezza è il piano *xz* cioè il piano in cui la trave ha rigidezza flessionale EI_y minima.

Lunghezza libera di inflessione
$l_0 = 2l$=600 cm

raggio d'inerzia
$\rho = \min(\rho_x, \rho_y) = \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ =5.27 cm

snellezza
$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{600}{5.27} = 113.84$$

snellezza limite

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = 93.91$$

Carico critico
Essendo $\lambda > \lambda_0$ la trave è snella e il carico critico euleriano vale:
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_0^2} = 479.5 \text{ kN}$$