

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "G. D'ANNUNZIO" DI CHIETI-PESCARA
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

✦
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA, CORSI DI LAUREA TRIENNALI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI E TEORIA DELLE STRUTTURE (Canali B,C)

a.a. 2007-2008

Docenti: □ M. VASTA, □ P. CASINI

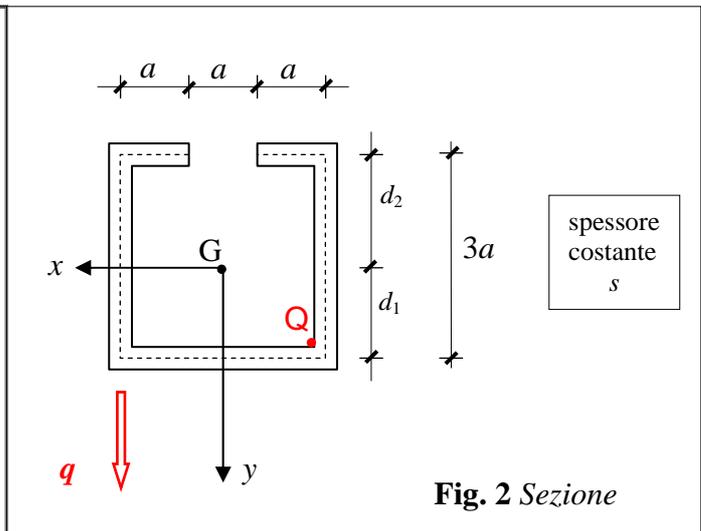
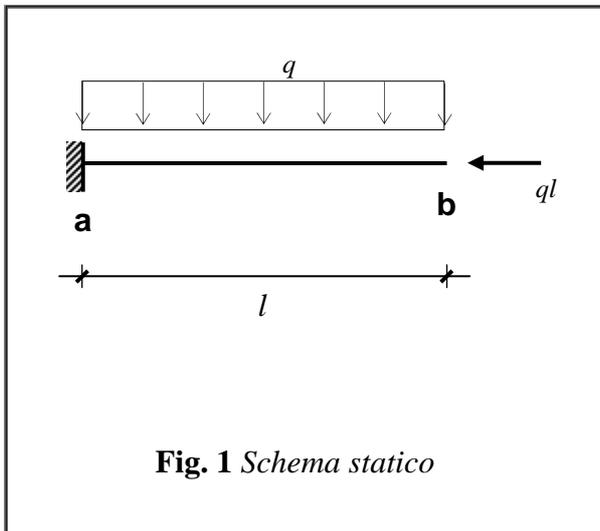
Seconda prova d'esonero del 13.12.2007

Tema B

I quesiti 4, 5, 6 valgono come prova per l'esame del modulo di Teoria delle Strutture. Il quesito 7 è facoltativo.

La mensola in Fig. 1 è realizzata con una trave di acciaio la cui sezione è riportata in Fig. 2. Lo spessore della sezione è costante e pari a s ; il carico q è diretto come in Fig. 2 e la forza normale ql passa per il baricentro.

1. Si disegni lo schema di struttura libera e i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.
2. Si studi lo stato di tensione nella sezione ritenuta più sollecitata, determinando leggi analitiche e diagrammi delle tensioni normali e tangenziali.
3. In corrispondenza del punto Q di tale sezione effettuare la verifica di resistenza con il *criterio di von Mises*.
4. Classificare lo stato tensionale in Q, determinando il tensore della tensione, gli invarianti della tensione e le tensioni principali. Rappresentare graficamente lo stato tensionale in Q attraverso i cerchi di Mohr e determinare graficamente tensioni e direzioni principali.
5. Nel punto Q, determinare le componenti della deformazione ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$) e le deformazioni principali ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$). Scrivere il tensore della deformazione nel sistema di riferimento x, y, z e nel sistema di riferimento principale. Mostrare che la dilatazione cubica ϵ_v non dipende dal sistema di riferimento in cui si calcola il tensore della deformazione. Nel punto Q il volume di un elemento infinitesimo diminuisce o aumenta?
6. Effettuare le verifiche di resistenza in Q utilizzando i seguenti criteri: Galileo-Rankine, Saint Venant-Grashof, Tresca, von Mises.
7. Calcolare la snellezza della trave e il carico critico euleriano della trave in assenza del carico distribuito q . In caso di collasso per instabilità la trave si inflette nel piano yz o nel piano xz ? Motivare la risposta.



DATI. *Schema statico:* $l=300$ cm, $q=1$ kN/m=0.01 kN/cm.

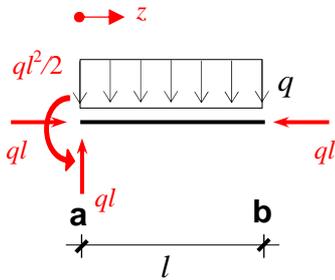
Sezione: $a=5$ cm, $s=0.5$ cm, $A=27.5$ cm², $I_x=971.8$ cm⁴, $I_y=1120.1$ cm⁴ $d_1=6.8$ cm, $d_2=8.2$ cm

Materiale: elastico, lineare, omogeneo, isotropo: $E=21000$ kN/cm², $\nu=0.3$, $G=8100$ kN/cm², $\sigma_0=23.5$ kN/cm².

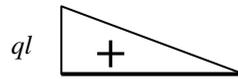
COGNOME..... NOME..... MAT.	
--	--

Soluzione Tema B

1) Reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione



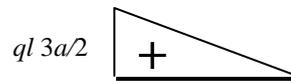
$$\begin{cases} N = -ql \\ T_y(z) = ql - qz \\ M_x(z) = -\frac{ql^2}{2} + qlz - \frac{qz^2}{2} \\ M_t(z) = T_y \cdot \frac{3}{2}a \text{ (antiorario se } T_y > 0) \end{cases}$$



T_y



M_x



M_t



N

2) Stato tensionale nella sezione più sollecitata (incastro)

2a. Inerzia torsionale della sezione

$$I_t = \frac{1}{3}(11a) \cdot s^3 = 2.29 \text{ cm}^4$$

2b. Sollecitazioni agenti nella sezione di incastro

$$N = -ql = -3 \text{ kN}, T_y = ql = 3 \text{ kN}, M_x = -\frac{ql^2}{2} = -0.01 \cdot \frac{300^2}{2} = -450 \text{ kN cm},$$

$$M_t = ql \cdot \frac{3}{2}a = 0.01 \cdot 300 \cdot 7.5 = 22.5 \text{ kN cm (antiorario)}$$

2c. Tensioni normali σ_z (vedi figura alla pag. seguente)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{-3}{27.5} + \frac{-450}{971.8} y = -0.109 - 0.463 y \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

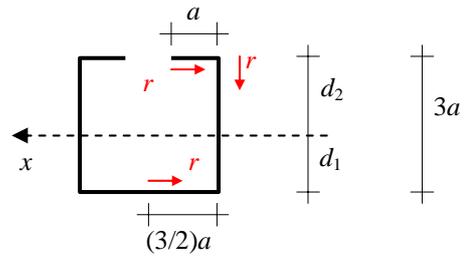
asse neutro : $\sigma_z = 0 \Rightarrow y = -0.23 \text{ cm}$

$$\sigma(A) = \sigma_z(y = -d_2) = 3.69 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(B) = \sigma_z(y = d_1) = -3.26 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(Q) = \sigma_z(d_1 - \frac{s}{2}) \cong \sigma_z(d_1) = \sigma(B) = -3.26 \text{ kN/cm}^2$$

2d. Tensioni tangenziali dovute al taglio
(vedi figura in fondo pagina)



$$\tau(r) = \frac{T_y S_x^*(r)}{I_x s} = \frac{3 S_x^*(r)}{971.8 \cdot 0.5} = 0.00617 \cdot S_x^*(r) \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

$$\tau_1 = \frac{T_y}{I_x s} a s d_1 = 0.13 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{T_y}{I_x s} \cdot \frac{3}{2} a \cdot d_2 = 0.16 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\tau_{\text{taglio}}(Q) \cong \tau_2 = 0.16 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\text{taglio}}(A) = \tau_{\text{taglio}}(B) = 0$$

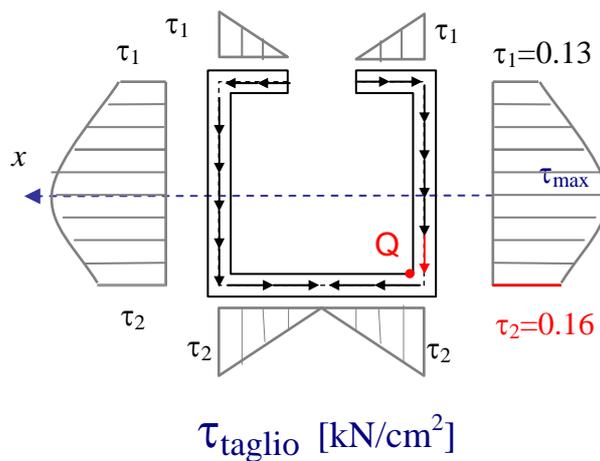
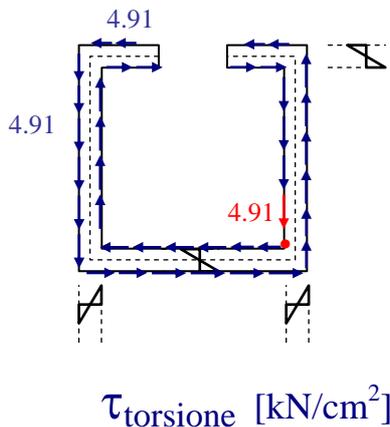
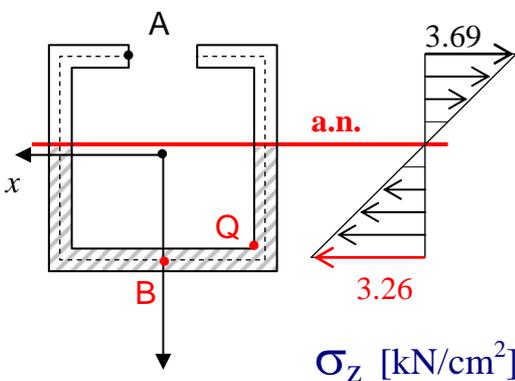
2e. Tensioni tangenziali dovute alla torsione (M_t antiorario)

$$\tau_i^{\text{max}} = \frac{M_{ti}}{I_{ti}} s_i = \frac{M_t}{I_t} s = \frac{22.5}{2.29} 0.5 = 4.91 \text{ kN/cm}^2 \text{ (nullo sulla linea media)}$$

$$\tau_{\text{tors}}(Q) = 4.91 \text{ kN/cm}^2 \text{ (diretta verso il basso)}$$

$$\tau_{\text{tors}}(A) = \tau_{\text{tors}}(B) = 0$$

2f. Diagrammi dello stato tensionale (valori in kN/cm²)



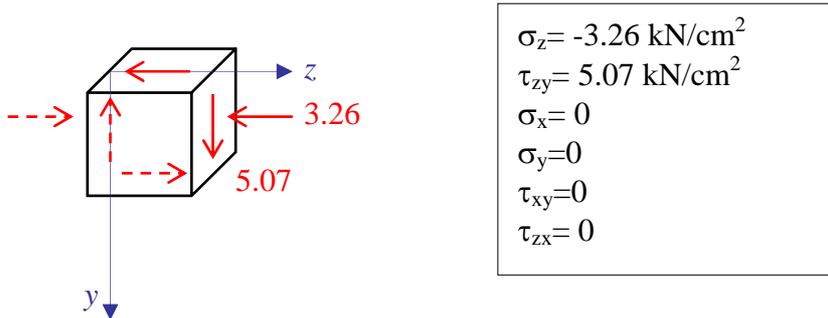
3) Verifica nel punto Q (von Mises)

in Q si ha:

$$\sigma(Q) \cong \sigma(A) = -3.26 \text{ kN/cm}^2, \quad \tau_{TOT} = 0.16 + 4.91 = 5.07 \text{ kN/cm}^2 \text{ (verso il basso)}$$

$$\text{von Mises } \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-3.26)^2 + 3 \cdot 5.07^2} = 9.36 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_0 \quad \text{Verifica soddisfatta}$$

4) Stato tensionale in Q (kN/cm²)



Tensore della Tensione in Q e invarianti (unità di misura: kN e cm)

$$T(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.07 \\ 0 & 5.07 & -3.26 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3.26 \\ I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -25.7 \\ I_3 = \det(T) = 0 \end{cases}$$

Equazione Caratteristica (unità di misura: kN e cm)

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad \sigma_n^3 + 3.26 \sigma_n^2 - 25.7 \sigma_n = 0$$

Tensioni principali

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = 3.69 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_2 = \frac{I_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_1}{2}\right)^2 - I_2} = -6.95 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_3 = 0$$

Classificazione dello stato tensionale in Q

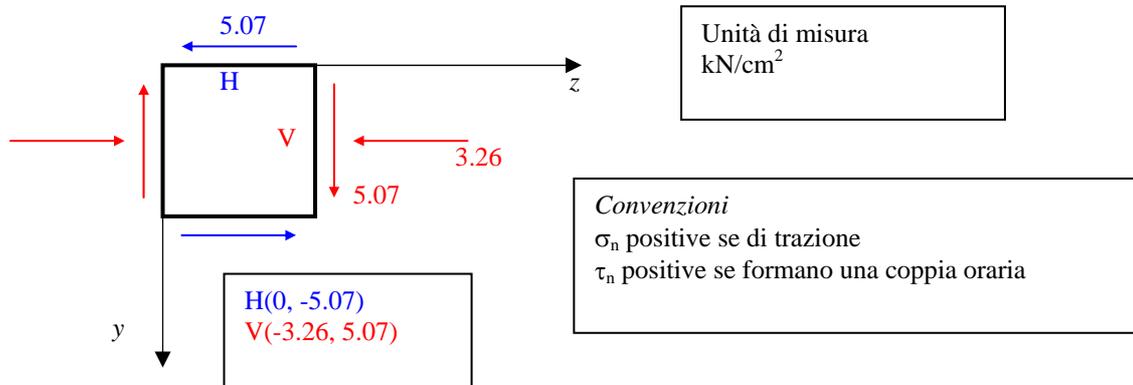
Lo stato tensionale in Q è piano ($I_3=0$) con direzione principale associata a $\sigma_3=0$ coincidente con x . Il cerchio di Mohr C_3 relativo alla direzione principale x , ha centro K_3 e raggio R espressi da:

$$K_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \equiv (-1.63, 0) \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 5.32 \quad (\text{kN/cm}^2)$$

Cerchio di Mohr C_3 in Q

Stato tensionale in Q

$$\sigma_z = -3.26 \text{ kN/cm}^2, \quad \tau_{zy} = 5.07 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0,$$



Caratteristiche del cerchio di Mohr (kN/cm^2)

$$K_3 = \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}, 0 \right) = \left(\frac{0 - 3.26}{2}, 0 \right) = (-1.63, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{0 + 3.26}{2} \right)^2 + 5.07^2} = 5.32$$

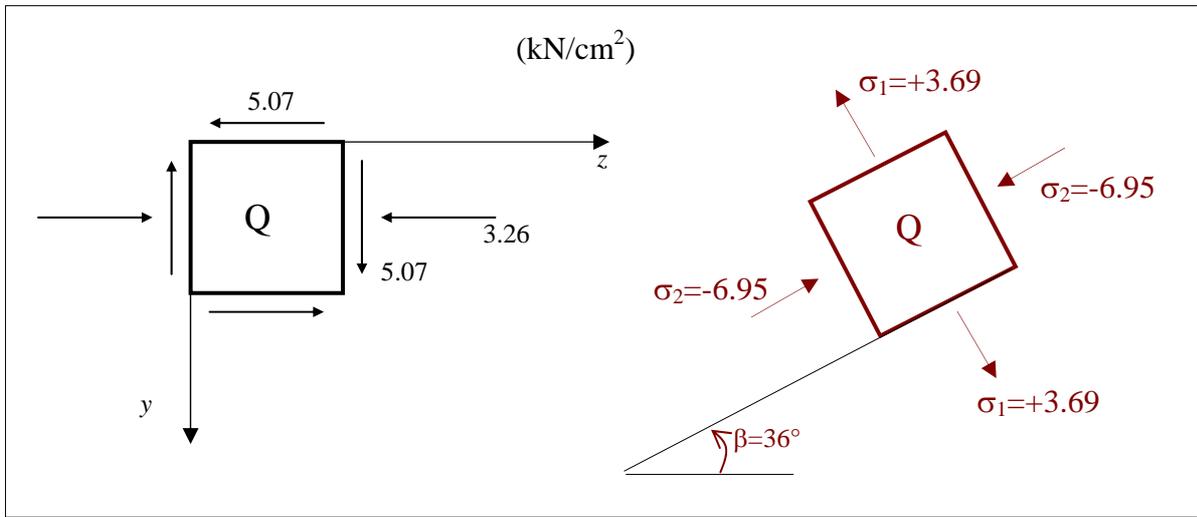
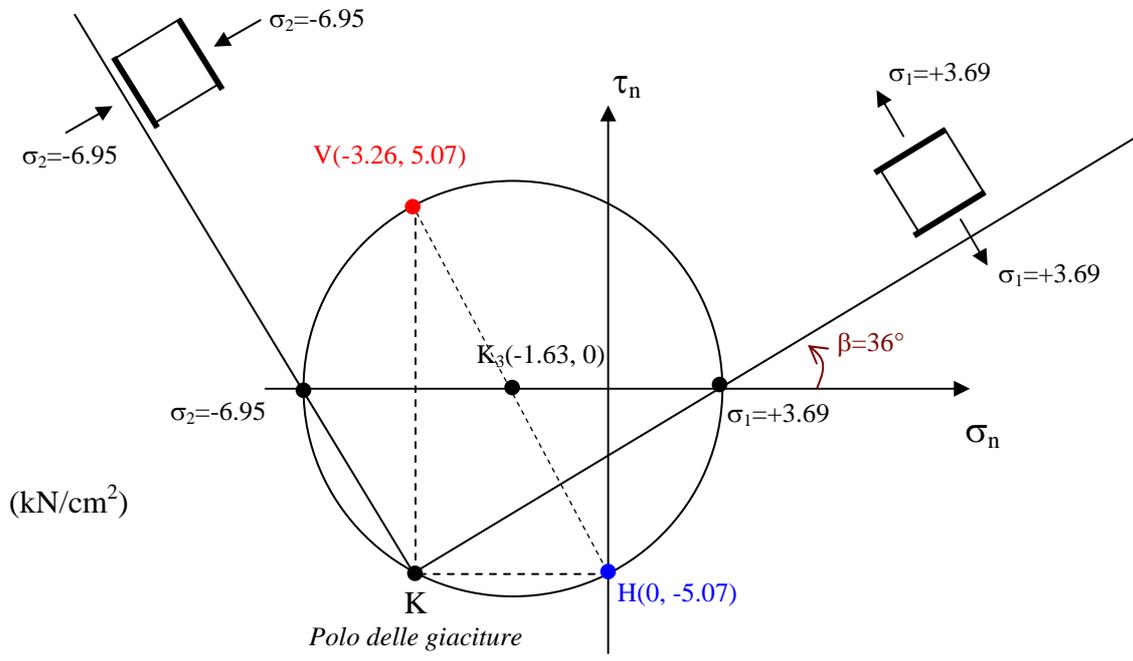
$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_y - \sigma_z} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot 5.07}{0 + 3.26} \right) \cong 36^\circ$$

Tensioni principali

$$\sigma_1 = \lambda_{k3} + R = +3.69 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_1 = \lambda_{k3} - R = -6.95 \text{ kN/cm}^2$$

Cerchio di Mohr C₃, nel punto Q



5) Stato deformativo in Q

Materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo: leggi generalizzate di Hooke

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = 4.657 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = 4.657 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_z}{E} = -1.552 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 6.259 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento x,y,z

$$\varepsilon(Q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.657 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 4.657 \cdot 10^{-5} & 3.13 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 3.13 \cdot 10^{-4} & -1.552 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Deformazioni principali

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2 = 2.753 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1 = -3.840 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4.657 \cdot 10^{-5} \end{array} \right. \quad \text{Nota: } \varepsilon_3 = \varepsilon_x \text{ essendo } x \text{ la terza direz. principale}$$

Tensore della deformazione in Q nel sistema di riferimento principale

$$\varepsilon(Q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.753 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -3.840 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 4.657 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Dilatazione cubica

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -6.210 \cdot 10^{-5}$$

(essendo $\varepsilon_v = \Delta V/V_0$ negativo, il volume dell'elemento intorno a Q *diminuisce*)

6) Verifiche di resistenza in Q

Caratteristiche del materiale

$$\sigma_0 = 23.5 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E = 1.12 \cdot 10^{-3}$$

Galileo-Rankine

$$\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_0 \quad \text{OK}$$

Saint Venant-Grashof

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < \varepsilon_0 \quad \text{OK}$$

von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = 9.36 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{id} < \sigma_0 \quad \text{OK}$$

Tresca

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_2 = 10.65 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{id} < \sigma_0 \quad \text{OK}$$

7) Stabilità

Essendo $I_x < I_y$ ($\rho_x < \rho_y$) il piano 'debole' in cui si ha massima snellezza è il piano yz cioè il piano in cui la trave ha rigidezza flessionale EI_x minima.

Lunghezza libera di inflessione

$$l_0 = 2l = 600 \text{ cm}$$

raggio d'inerzia

$$\rho = \min(\rho_x, \rho_y) = \rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 5.944 \text{ cm}$$

snellezza

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{600}{5.944} = 100.93$$

snellezza limite

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = 93.91$$

Carico critico

Essendo $\lambda > \lambda_0$ la trave è snella e il carico critico euleriano vale:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l_0^2} = 559.5 \text{ kN}$$

