

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "G. D'ANNUNZIO" DI CHIETI-PESCARA
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA



CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA, CORSI DI LAUREA TRIENNALI
c.i. **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI e TEORIA DELLE STRUTTURE**

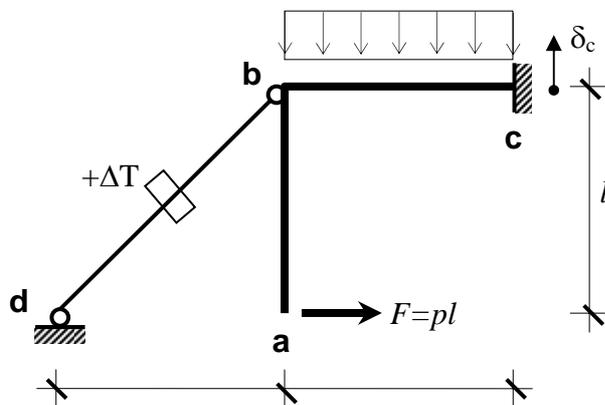
a.a. 2009-2010

Marcello Vasta, Paolo Casini

(Esercizi di preparazione alla prova d'esonero)

Travature iperstatiche $i=1$: Metodo delle Forze

PROBLEMA 1

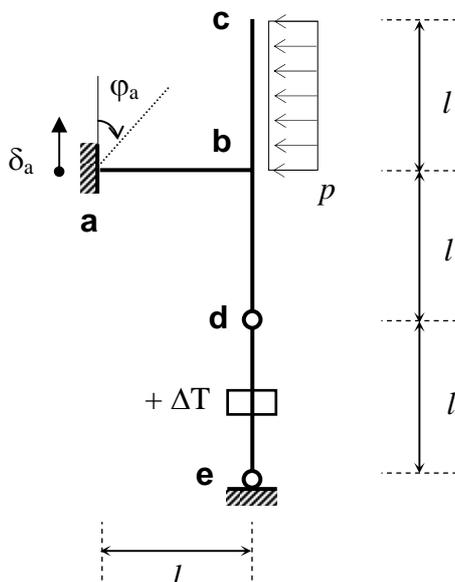


Dati numerici: $l=3.0$ m, $p=800$ N/m, $\Delta T=20^\circ\text{C}$, $\alpha=10^{-5}$ $^\circ\text{C}^{-1}$, $EI = 2 \cdot 10^6$ Nm^2 , $EA = GA^* = \infty$, $\delta_c = 3 \cdot 10^{-3}$ m

Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

1. esibire tre sistemi principali distinti;
2. determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
3. calcolare l'incognita iperstatica;
4. calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.
5. Nel problema assegnato la variazione termica agisce soltanto sull'asta **d-b**: come cambierebbe la risposta della struttura se anche il tratto **a-b** fosse soggetto a variazione termica?

PROBLEMA 2



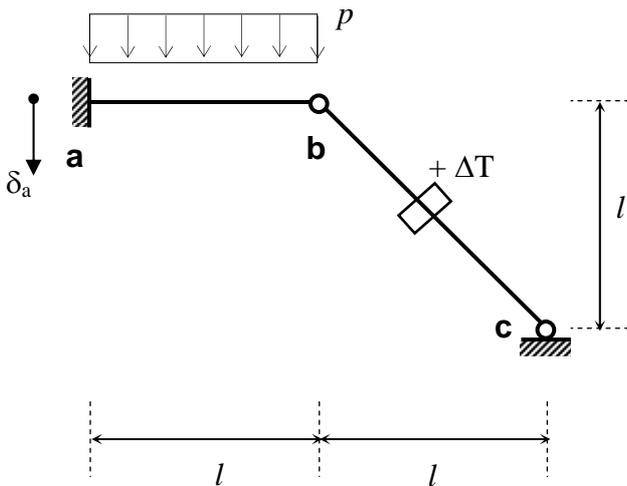
Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma: $l=3.0$ m, $p=800$ N/m, $\Delta T=15^\circ\text{C}$, $\alpha=10^{-5}$ $^\circ\text{C}^{-1}$, $EI = 2 \cdot 10^6$ Nm^2 , $EA = GA^* = \infty$, $\delta_a = 3 \cdot 10^{-3}$ m

$$\varphi_a = 2\delta_a / l$$

PROBLEMA 3

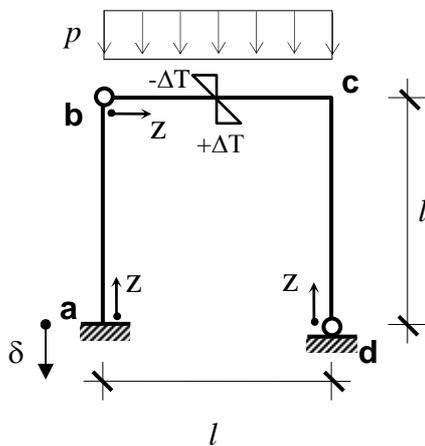


Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma $l=3.0\text{ m}$, $p=400\text{ N/m}$, $\Delta T=30^\circ\text{C}$, $\alpha=10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $EI=2\cdot 10^6\text{ Nm}^2$, $EA=GA^*=\infty$, $\delta_a=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$.

PROBLEMA 4



Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

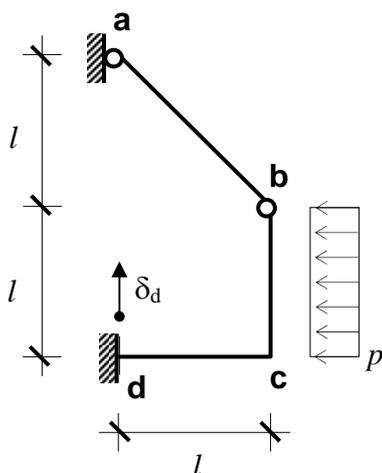
1. esibire tre sistemi principali distinti;
2. determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
3. calcolare l'incognita iperstatica;
4. calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Dati numerici:

$l=2.0\text{ m}$, $p=600\text{ N/m}$, $EI=2\cdot 10^6\text{ Nm}^2$, $EA=GA^*=\infty$,

$$\chi_r = \frac{2\alpha\Delta T}{h} = 0.001\text{ m}^{-1}, \delta=0.003\text{ m}$$

PROBLEMA 5



Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma:

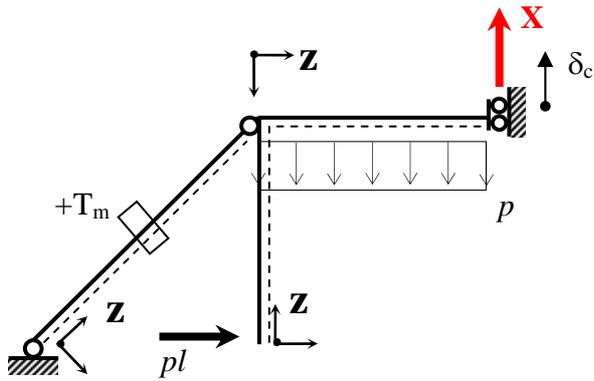
$l=3.0\text{ m}$, $p=800\text{ N/m}$, $EI=2\cdot 10^6\text{ Nm}^2$, $EA=GA^*=\infty$,

$$\delta_d = 3\cdot 10^{-3}\text{ m}$$

COGNOME.....
 NOME.....
 MAT.

1.

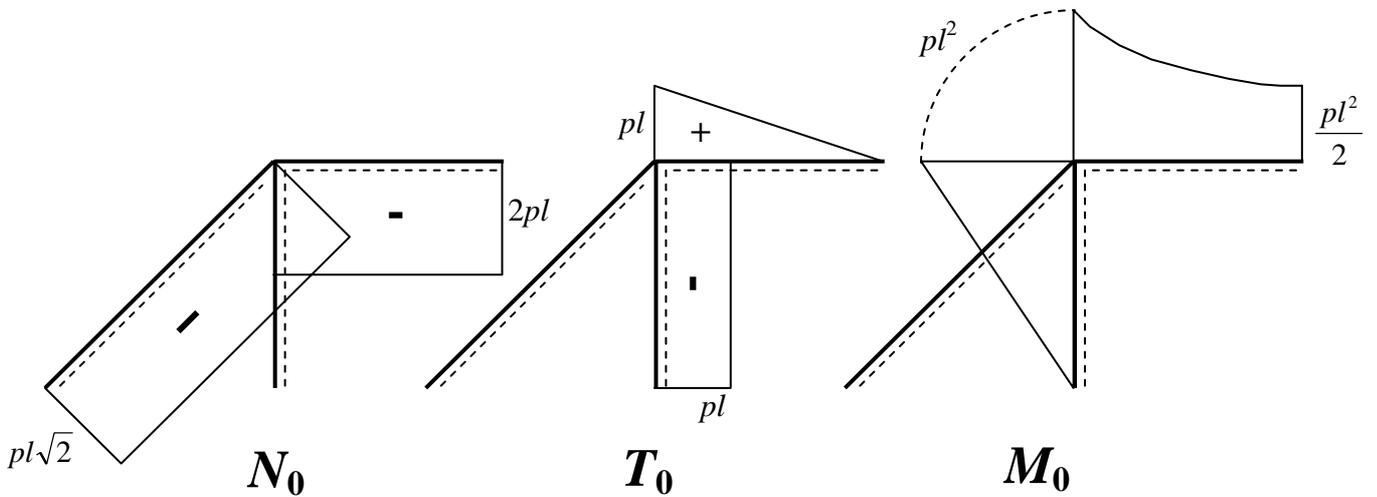
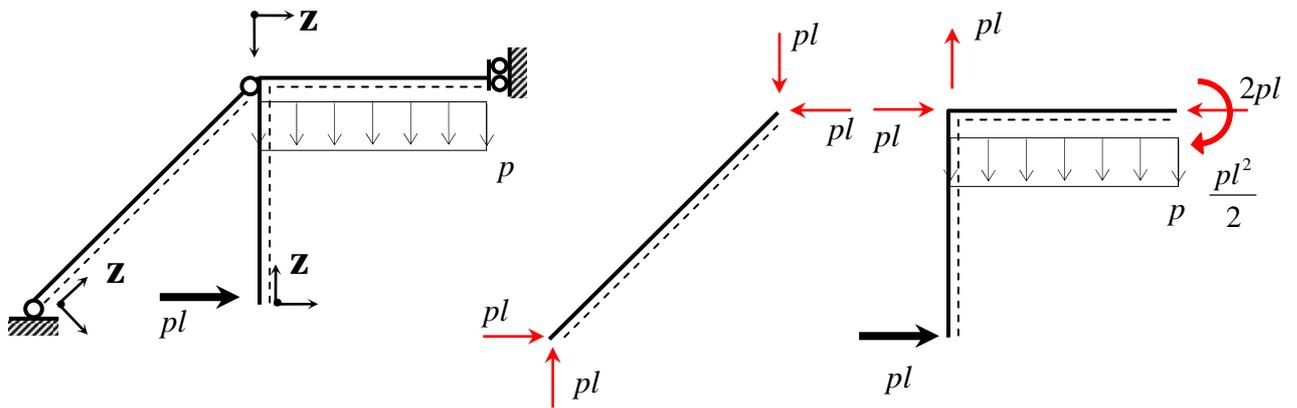
1.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE



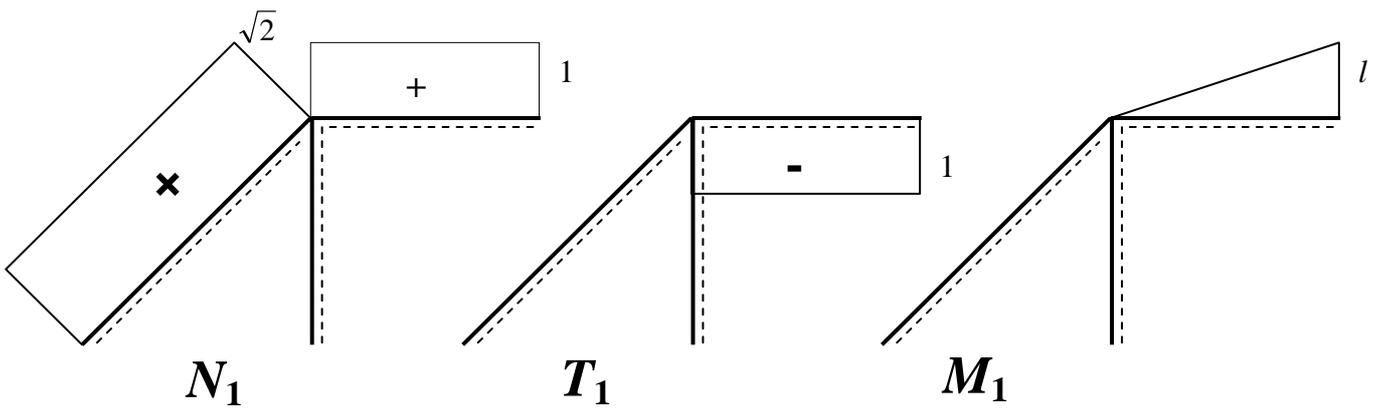
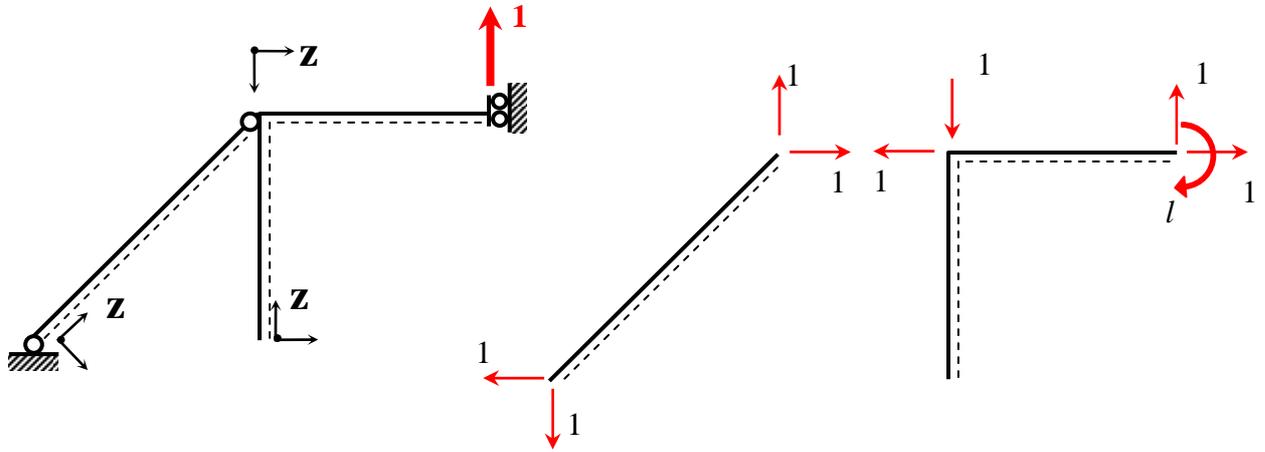
Equazione di congruenza:

$$v_c(X) = \delta_c$$

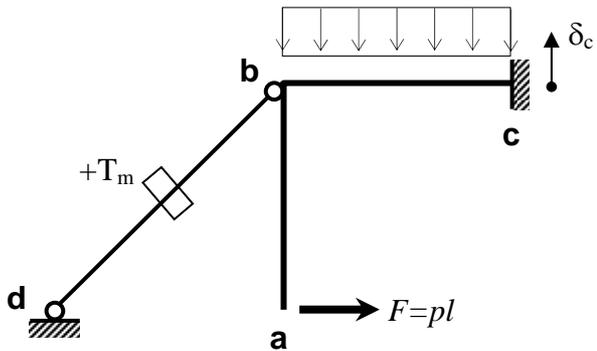
1.2 PROBLEMA '0'



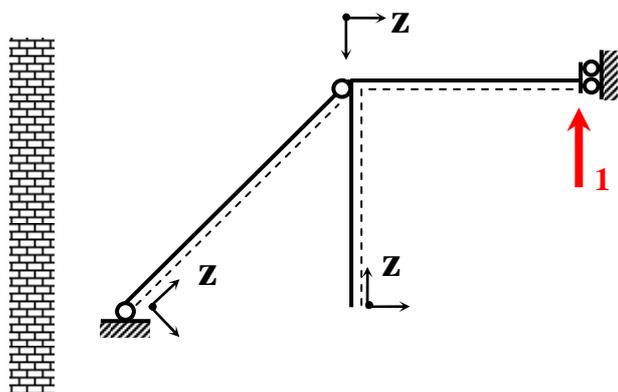
1.3 PROBLEMA '1'



1.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico



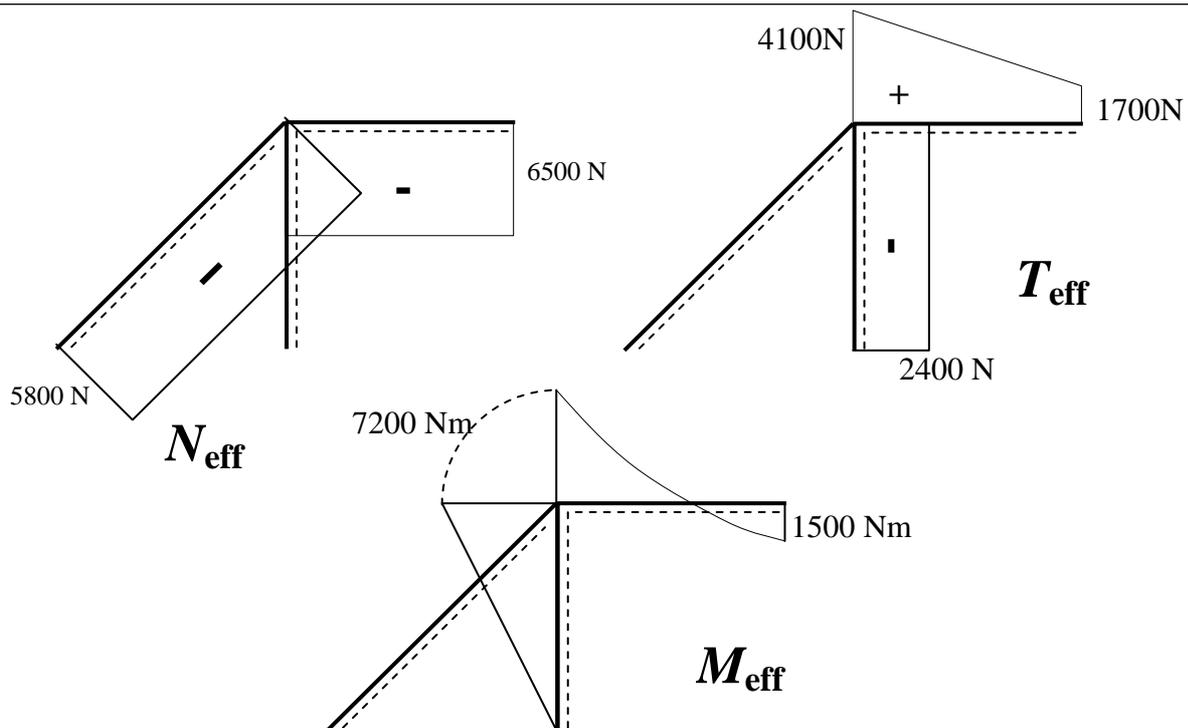
Problema virtuale

$$L_e^v = 1 \cdot \delta_c$$

$$L_i^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\int_0^{l\sqrt{2}} N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto } d-b} = \frac{7pl^4}{24EI} + X \frac{l^3}{3EI} + 2l\alpha T_m$$

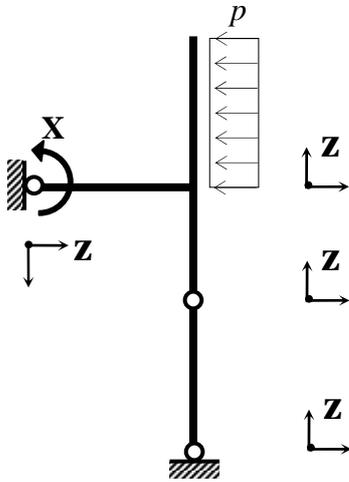
$$L_e^v = L_i^v \Rightarrow X = -\frac{7pl}{8} - \frac{6EI}{l^2} \alpha T_m + \frac{3EI}{l^3} \delta_a = -1700 \text{ N}$$

1.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI



2.

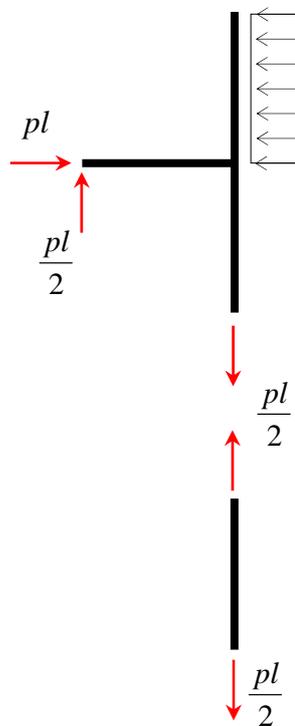
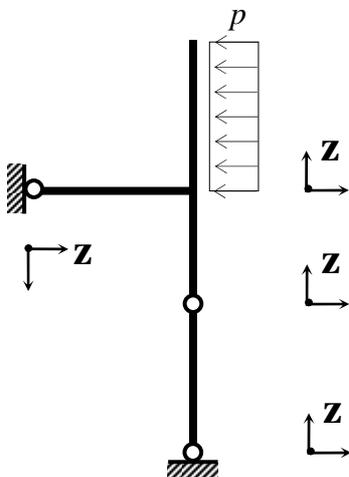
2.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE

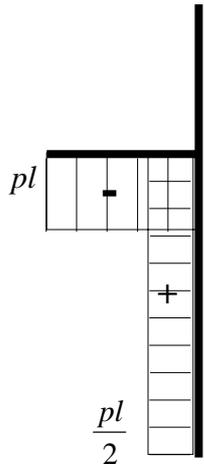


Equazione implicita di congruenza:

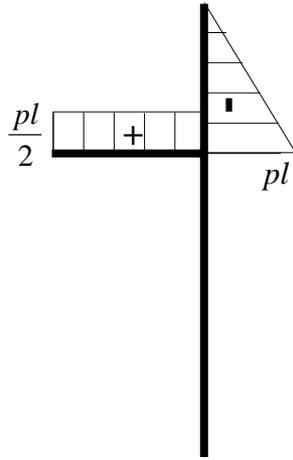
$$\theta_a(X) = -\varphi_a$$

2.2 PROBLEMA '0'

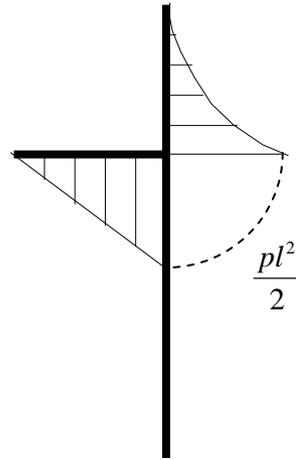




N_0

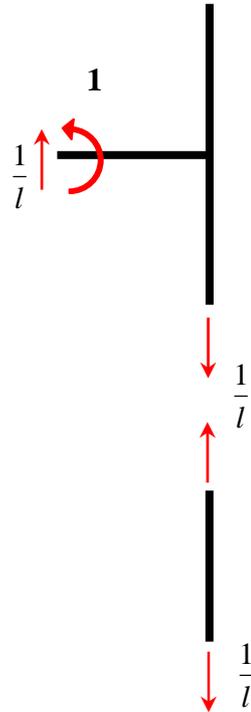
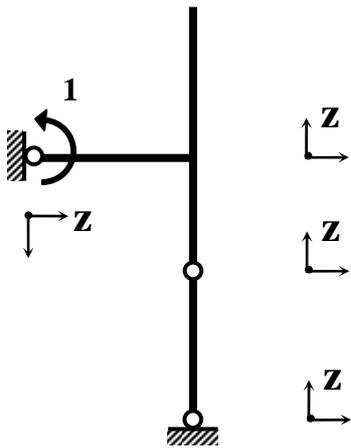


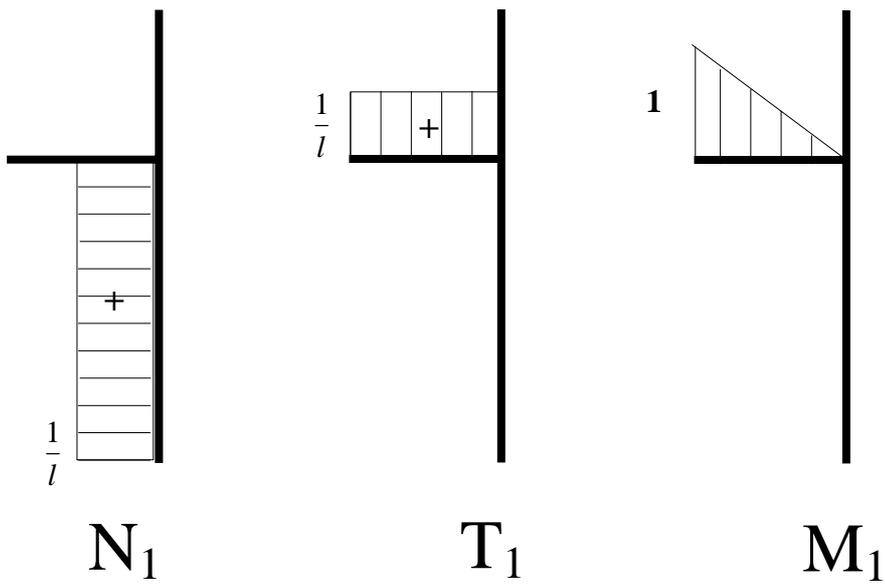
N_0



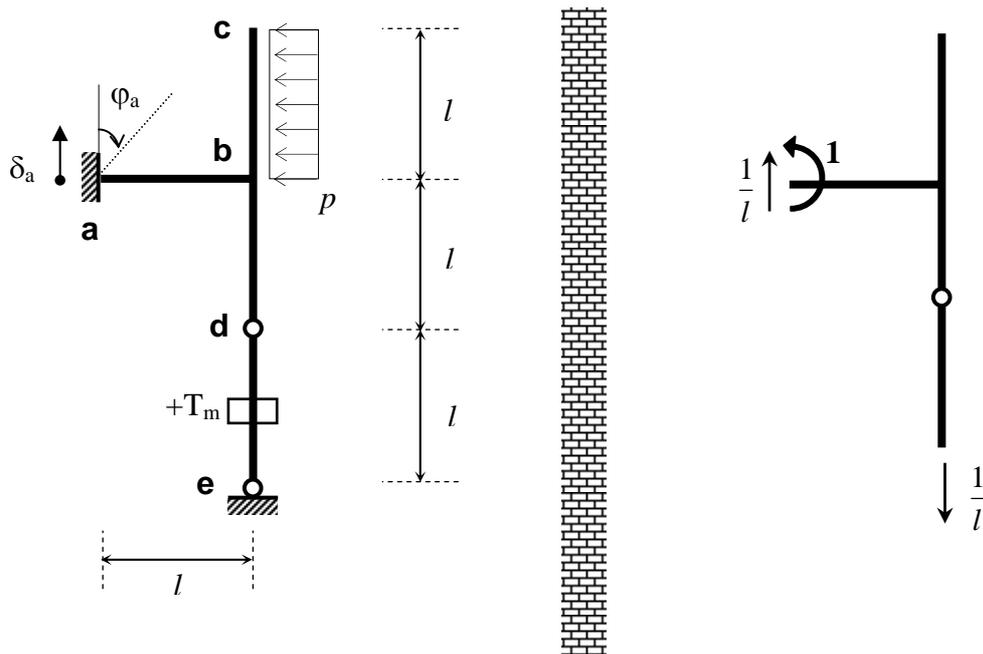
M_0

2.3 PROBLEMA '1'





2.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico

Problema virtuale

$$L_e^v = \frac{1}{l} \delta_a - 1 \cdot \varphi_a = \frac{\delta_a}{l} - \frac{2\delta_a}{l} = -\frac{\delta_a}{l}$$

$$L_1^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto a-b}} + \underbrace{\int_0^l N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto e-d}} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_0 dz + \frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz + \alpha T_m$$

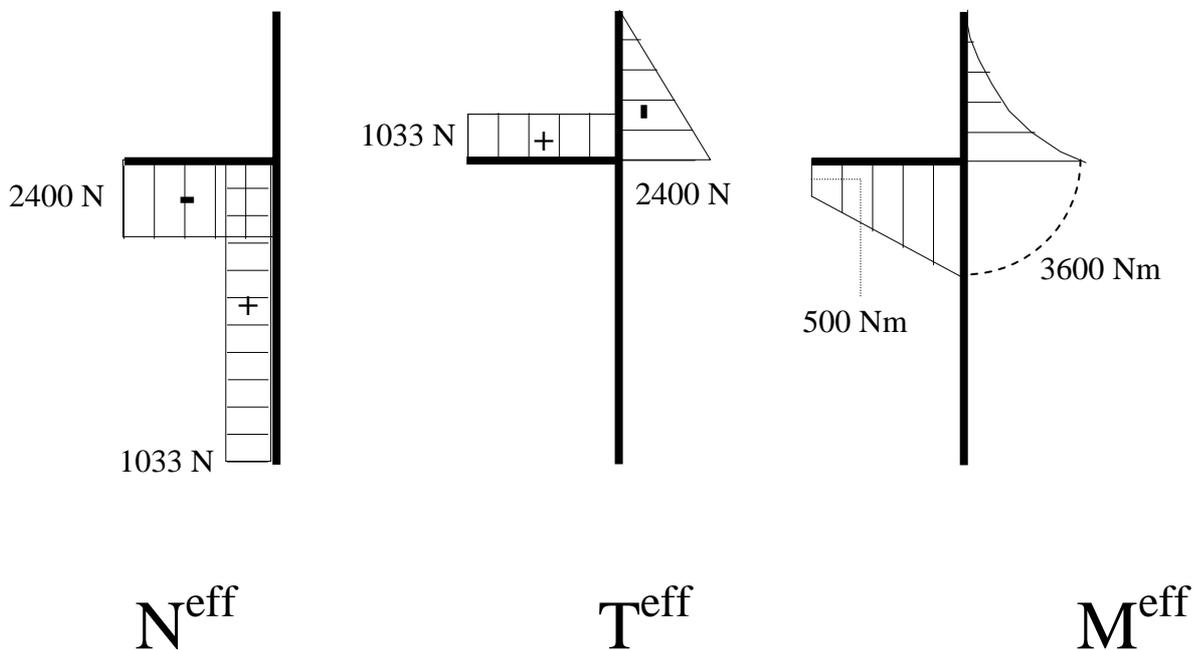
$$\int_0^l M_1 M_0 dz = \int_0^l \left(-1 + \frac{z}{l} \right) \left(\frac{pl}{2} z \right) dz = -\frac{pl^3}{12}$$

$$\int_0^l M_1^2 dz = \int_0^l \left(-1 + \frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{l}{3}$$

$$L_e^v = L_1^v \Rightarrow -\frac{\delta_a}{l} = -\frac{pl^2}{12EI} + \frac{Xl}{3EI} + \alpha T_m$$

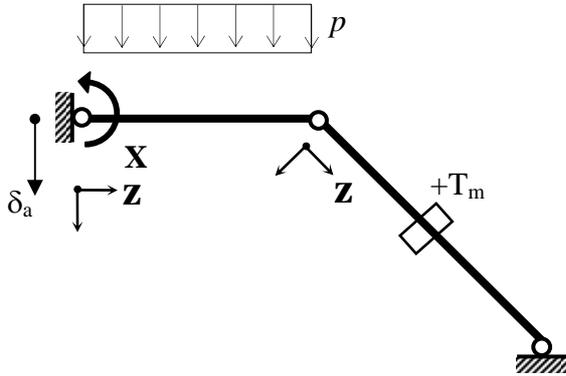
$$X = \frac{pl^2}{4} - \frac{3EI}{l} \alpha T_m - \frac{3EI}{l^2} \delta_a = -500 \text{ Nm}$$

2.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI TOTALI



3.

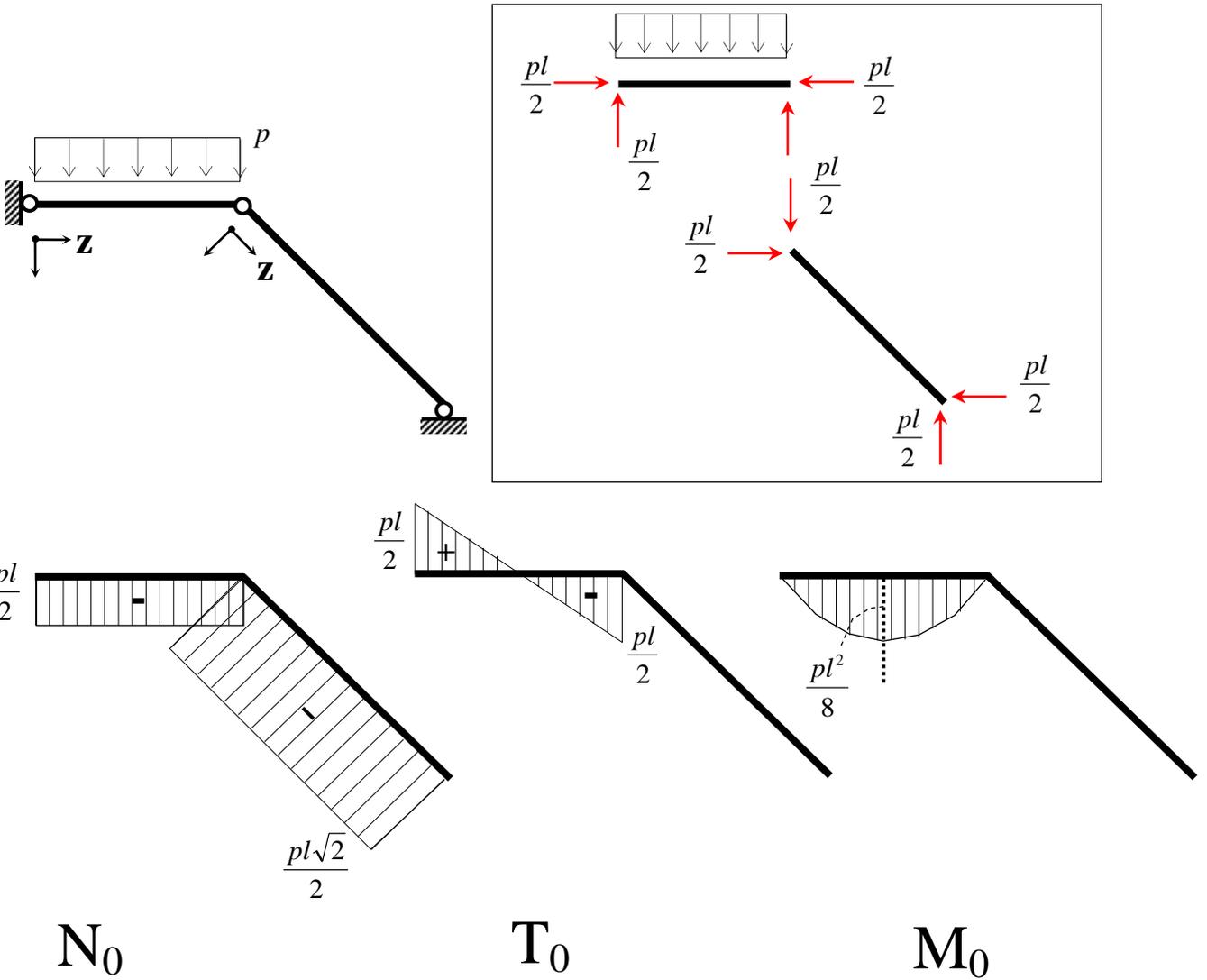
3.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE



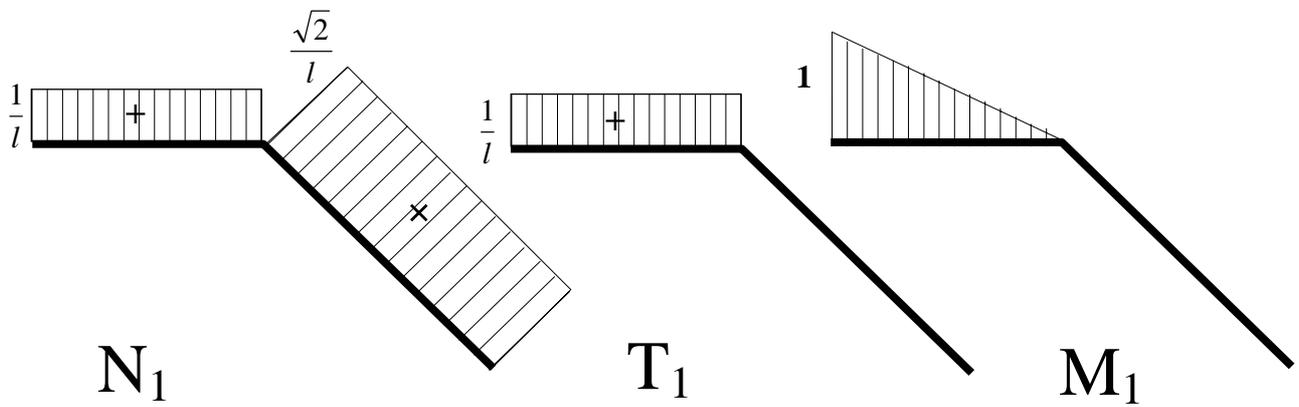
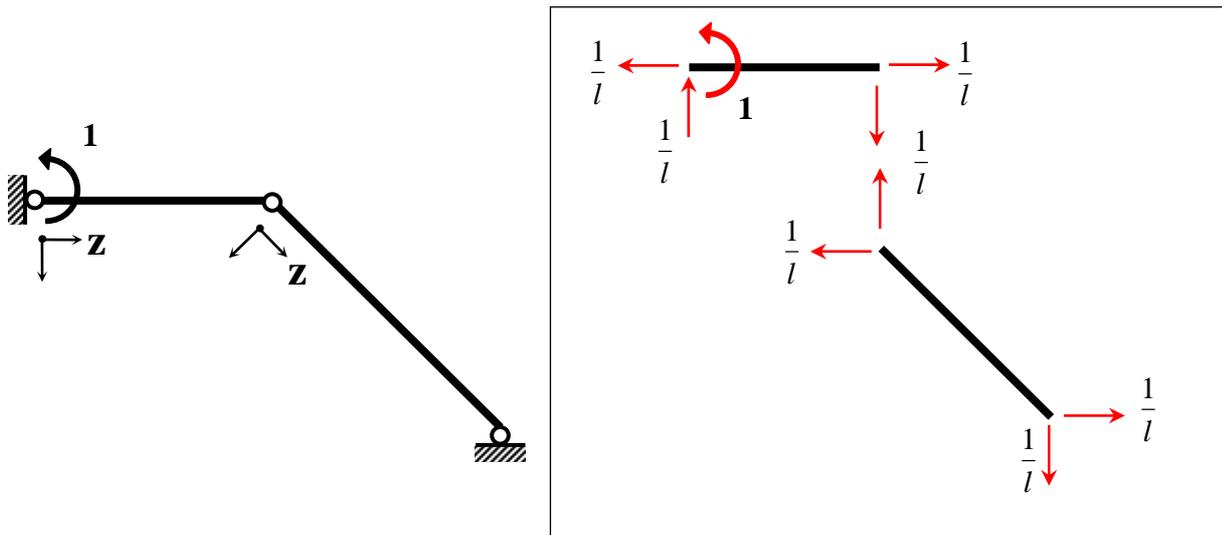
Equazione implicita di congruenza:

$$\theta_a(\mathbf{X})=0$$

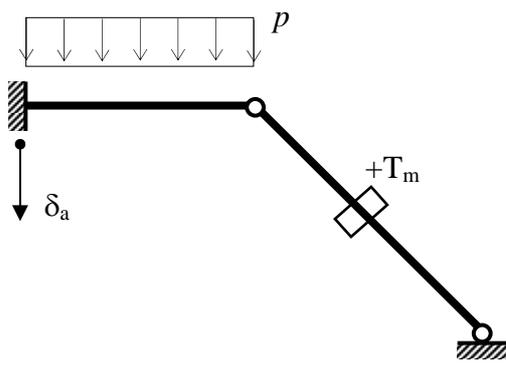
3.2 PROBLEMA '0'



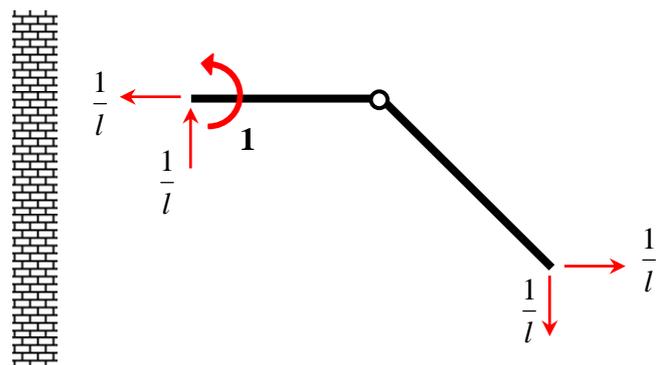
3.3 PROBLEMA '1'



3.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico



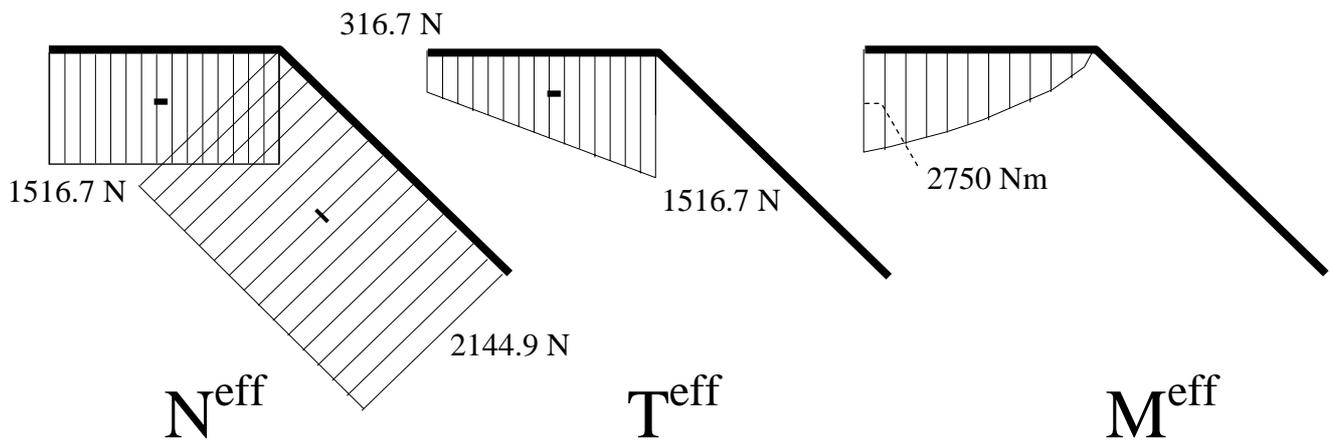
Problema virtuale

$$L_c^v = -\frac{1}{l}\delta_a$$

$$L_i^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{M_0(z) + X M_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto a-b}} + \underbrace{\int_0^{l\sqrt{2}} N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto b-c}} = -\frac{pl^3}{24EI} + X \frac{l}{3EI} + 2\alpha T_m$$

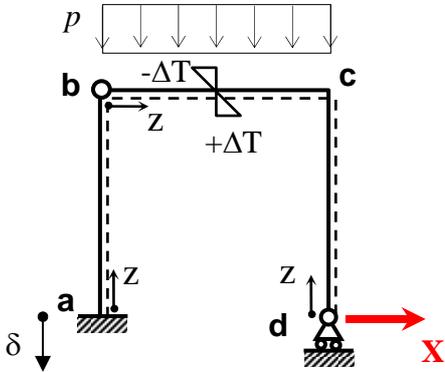
$$L_e^v = L_i^v \Rightarrow X = \frac{pl^2}{8} - \frac{6EI}{l} \alpha T_m - \frac{3EI}{l^2} \delta_a = -2750 \text{ Nm}$$

3.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI TOTALI



4.

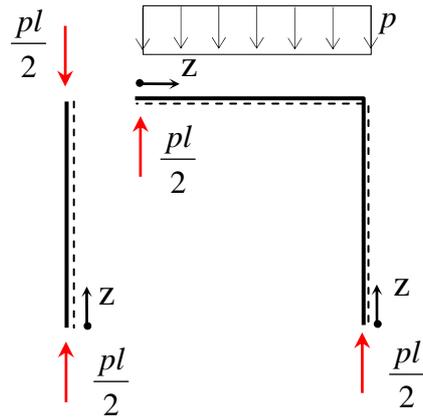
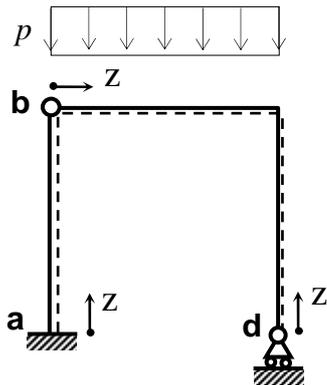
1.0 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE



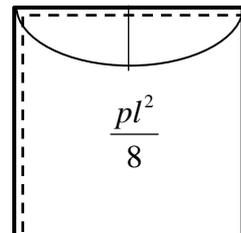
Equazione di congruenza:

$$w_d(X) = 0$$

1.1 PROBLEMA '0'

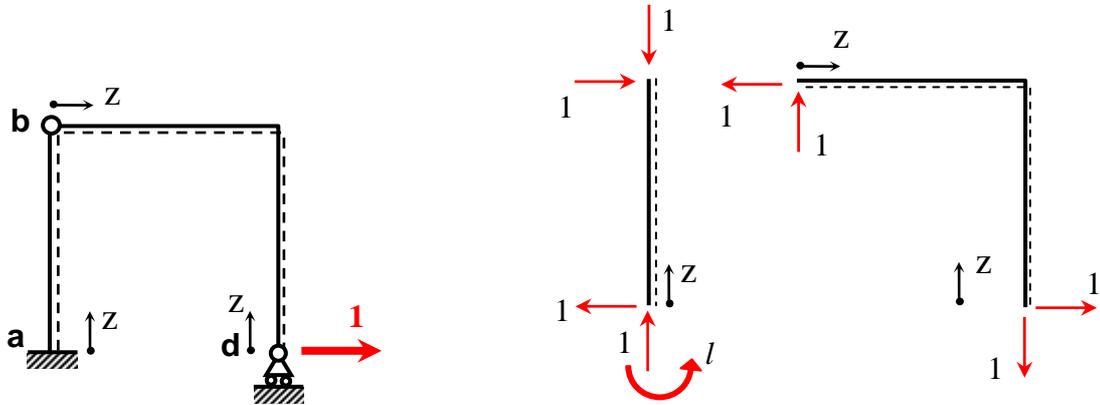


$$\begin{cases} \text{Tratto } ab: & M_0(z) = 0 \\ \text{Tratto } bc: & M_0(z) = \frac{pl}{2}z - \frac{pz^2}{2} \\ \text{Tratto } cd: & M_0(z) = 0 \end{cases}$$

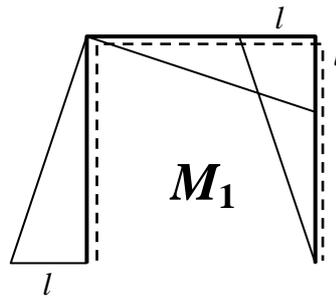


M_0

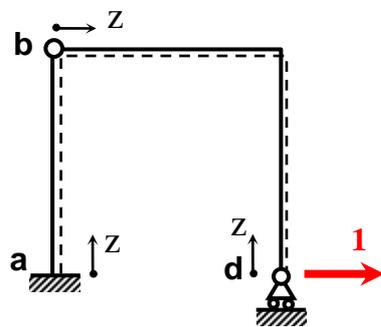
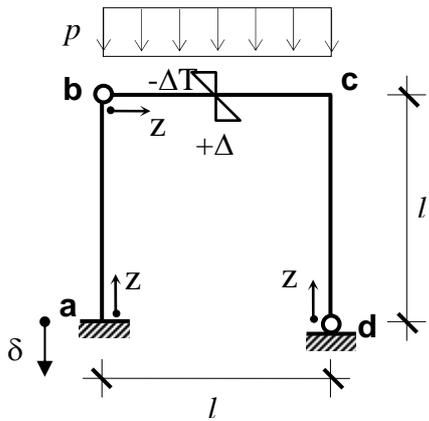
1.2 PROBLEMA '1'



$$\begin{cases} \text{Tratto } ab: & M_1(z) = -l + z \\ \text{Tratto } bc: & M_1(z) = z \\ \text{Tratto } cd: & M_1(z) = -z \end{cases}$$



1.3 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico

Problema virtuale

$$L_e^v = -1 \cdot \delta$$

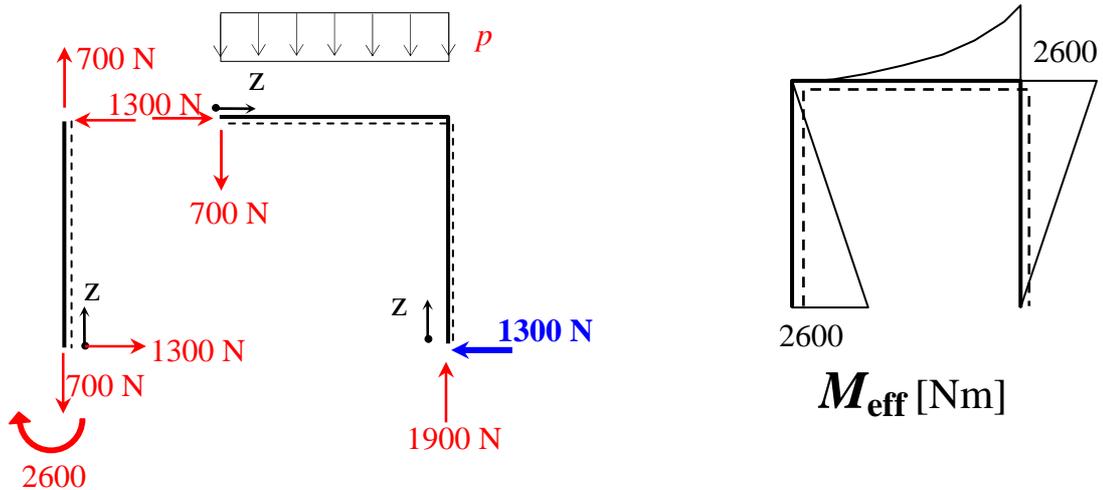
$$L_1^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{\cancel{M_0(z)} + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} + \chi_T \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{\cancel{M_0(z)} + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } c-d}$$

$$L_1^v = \underbrace{\frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2(z) dz}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left(\frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} + \chi_T \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2(z) dz}_{\text{tratto } c-d}$$

$$L_1^v = \underbrace{X \frac{l^3}{3EI}}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\frac{pl^4}{24EI} + \frac{\chi_T l^2}{2}}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{X \frac{l^3}{3EI}}_{\text{tratto } c-d} = \frac{pl^4}{24EI} + \frac{\chi_T l^2}{2} + X \frac{l^3}{EI}$$

$$L_e^v = L_1^v \Rightarrow X = -\frac{pl}{24} - \frac{EI}{2l} \chi_T - \frac{EI}{l^3} \delta = -1300 \text{ N}$$

1.4 REAZIONI E DIAGRAMMI EFFETTIVI



5.

Lo svolgimento è lasciato al lettore che può confrontare la propria soluzione con quanto segue.

4.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE E INCOGNITA IPERSTATICA

Il valore dell'incognita iperstatica relativa al sistema isostatico principale in figura è

$$X = \frac{21}{64} pl + \frac{3EI}{8l^3} \delta_a = +870 \text{ N}$$

