

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "G. D'ANNUNZIO" DI CHIETI-PESCARA  
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA



CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA, CORSI DI LAUREA TRIENNALI  
c.i. **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI e TEORIA DELLE STRUTTURE**

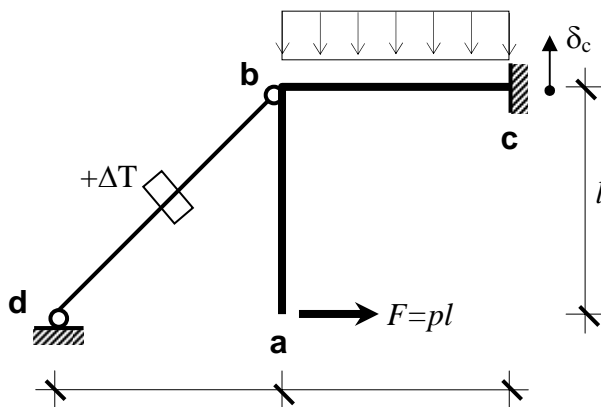
a.a. 2009-2010

Marcello Vasta, Paolo Casini

(Esercizi di preparazione alla prova d'esonero)

**Travature iperstatiche i=1: Metodo delle Forze**

**PROBLEMA 1**

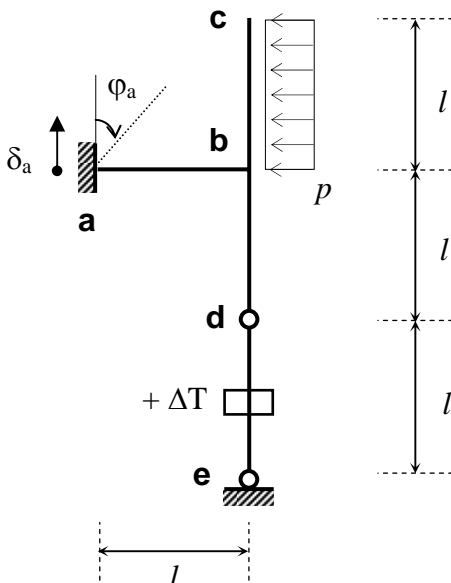


Dati numerici:  $l=3.0$  m,  $p=800$  N/m,  $\Delta T=20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha=10^{-5}$   $^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $EI = 2 \cdot 10^6$   $\text{Nm}^2$ ,  $EA = GA^* = \infty$ ,  $\delta_c = 3 \cdot 10^{-3}$  m

Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

1. esibire tre sistemi principali distinti;
2. determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
3. calcolare l'incognita iperstatica;
4. calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.
5. Nel problema assegnato la variazione termica agisce soltanto sull'asta **d-b**: come cambierebbe la risposta della struttura se anche il tratto **a-b** fosse soggetto a variazione termica?

**PROBLEMA 2**



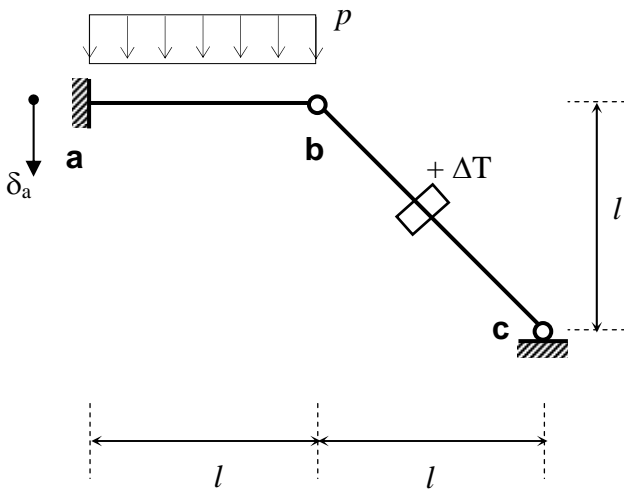
Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma:  $l=3.0$  m,  $p=800$  N/m,  $\Delta T=15^\circ\text{C}$ ,  $\alpha=10^{-5}$   $^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $EI = 2 \cdot 10^6$   $\text{Nm}^2$ ,  $EA = GA^* = \infty$ ,  $\delta_a = 3 \cdot 10^{-3}$  m

$$\varphi_a = 2\delta_a / l$$

### PROBLEMA 3

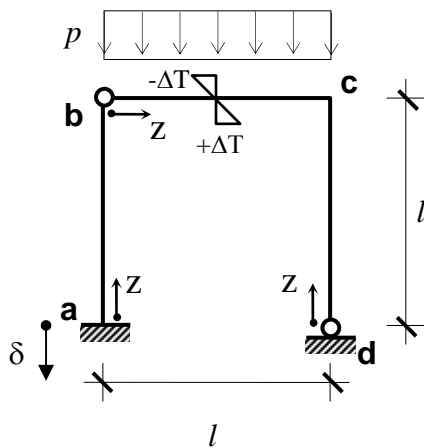


Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma  $l=3.0$  m,  $p=400$  N/m,  $\Delta T=30^\circ\text{C}$ ,  $\alpha=10^{-5}$   $^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $EI=2 \cdot 10^6$   $\text{Nm}^2$ ,  $EA=GA^*=\infty$ ,  $\delta_a=3 \cdot 10^{-3}$  m.

### PROBLEMA 4



Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

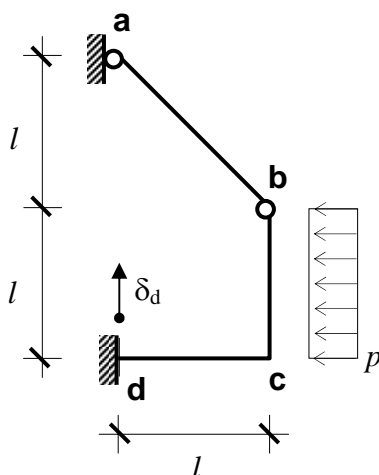
1. esibire tre sistemi principali distinti;
2. determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
3. calcolare l'incognita iperstatica;
4. calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Dati numerici:

$l=2.0$  m,  $p=600$  N/m,  $EI=2 \cdot 10^6$   $\text{Nm}^2$ ,  $EA=GA^*=\infty$ ,

$$\chi_r = \frac{2\alpha\Delta T}{h} = 0.001\text{m}^{-1}, \delta=0.003$$

### PROBLEMA 5



Si consideri il **sistema iperstatico** riportato in figura. Facendo uso del metodo delle forze, si chiede di:

- esibire tre sistemi principali distinti;
- determinare le leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione del problema '0' e del problema '1' tracciando i relativi diagrammi.
- calcolare l'incognita iperstatica;
- calcolare le leggi di variazione delle caratteristiche di sollecitazione effettive totali tracciando i relativi diagrammi.

Si assuma:

$l=3.0$  m,  $p=800$  N/m,  $EI=2 \cdot 10^6$   $\text{Nm}^2$ ,  $EA=GA^*=\infty$ ,

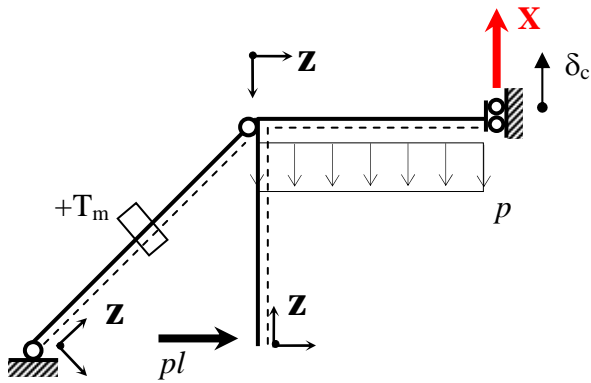
$$\delta_d = 3 \cdot 10^{-3}$$

COGNOME.....  
 NOME.....  
 MAT. ....

\_\_\_\_\_

# 1.

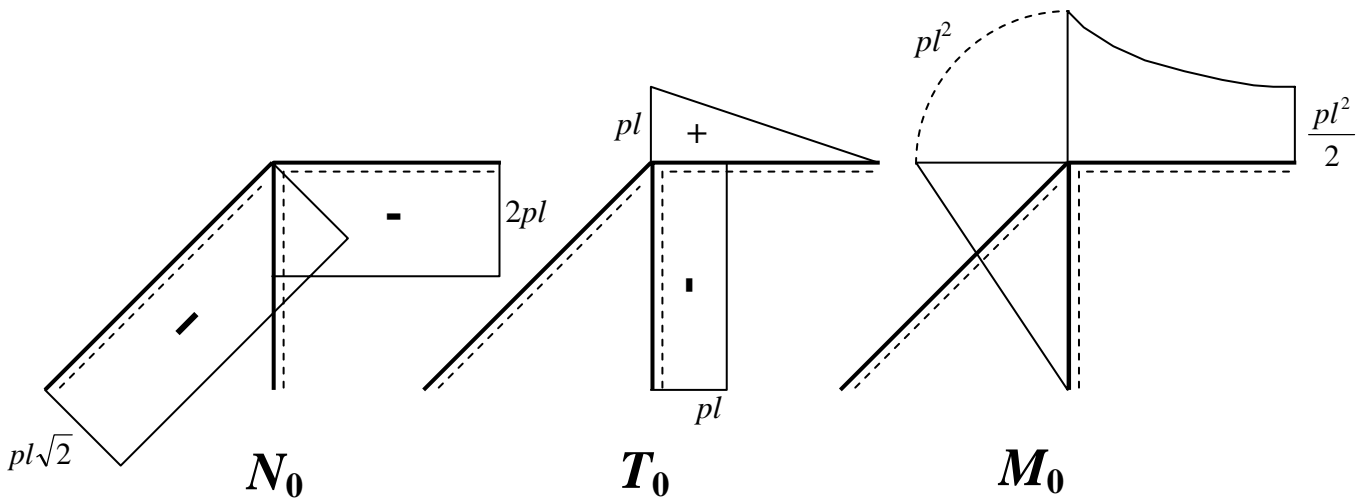
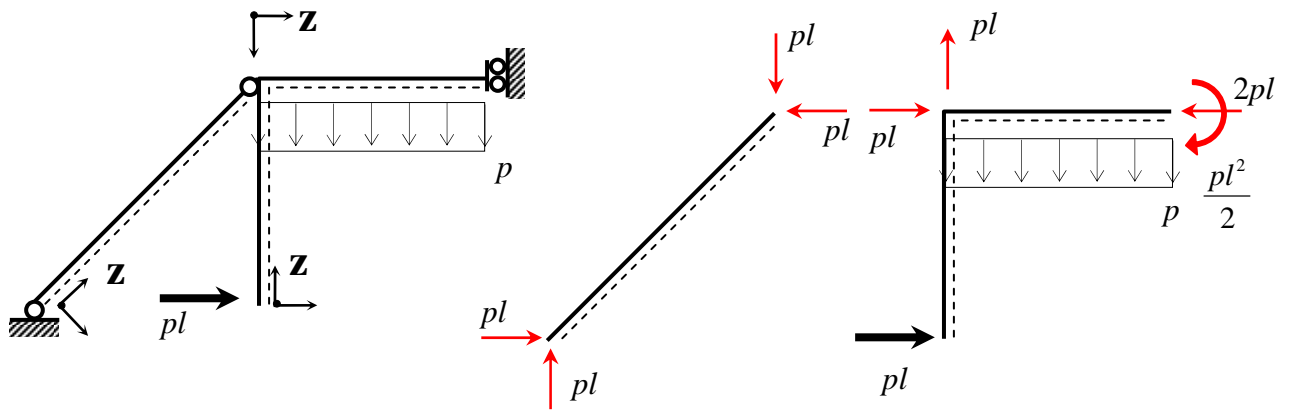
## 1.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE



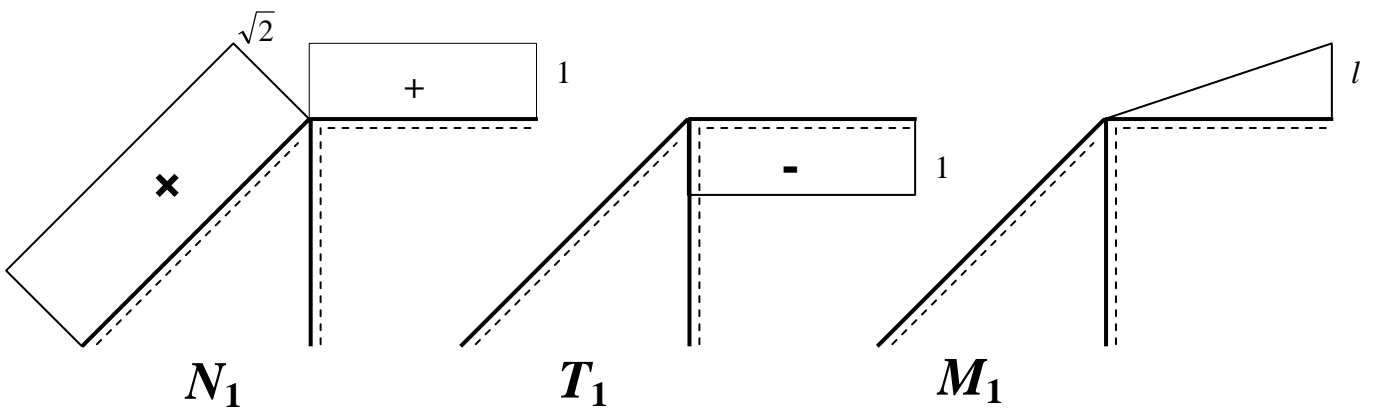
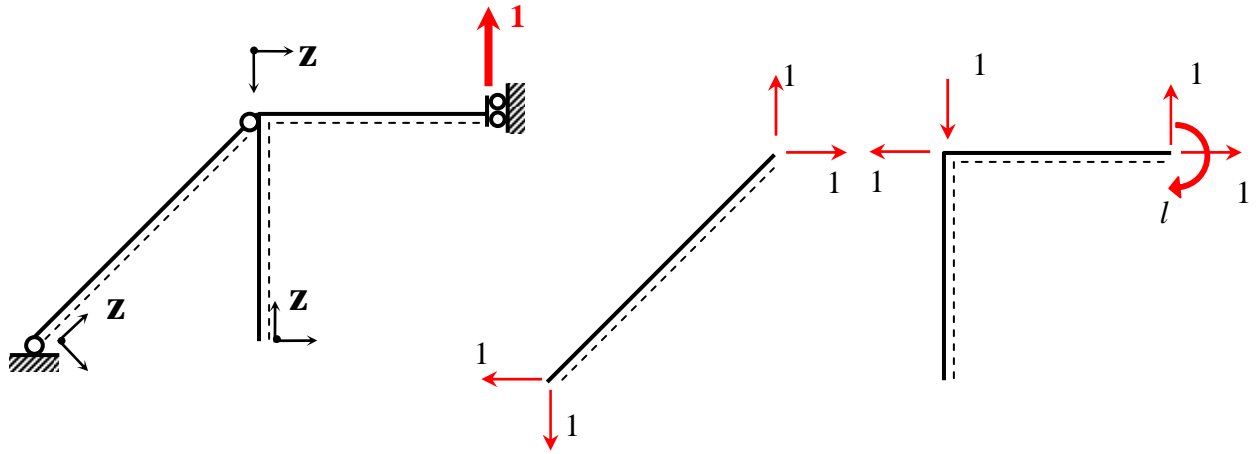
Equazione di congruenza:

$$v_c(X) = \delta_c$$

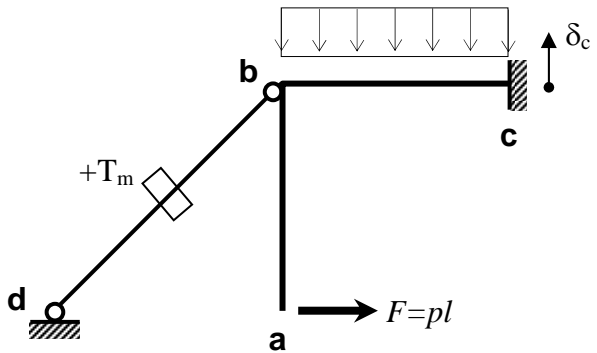
## 1.2 PROBLEMA '0'



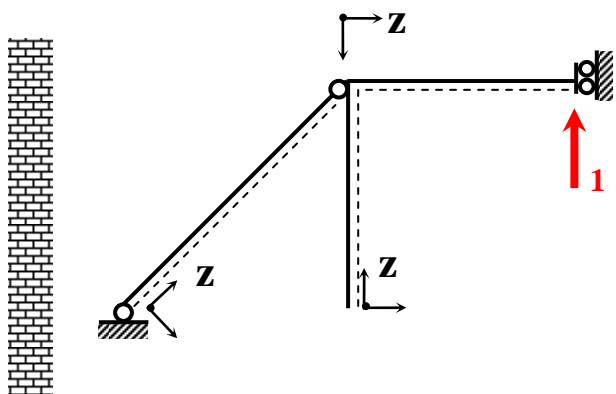
1.3 PROBLEMA '1'



1.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico



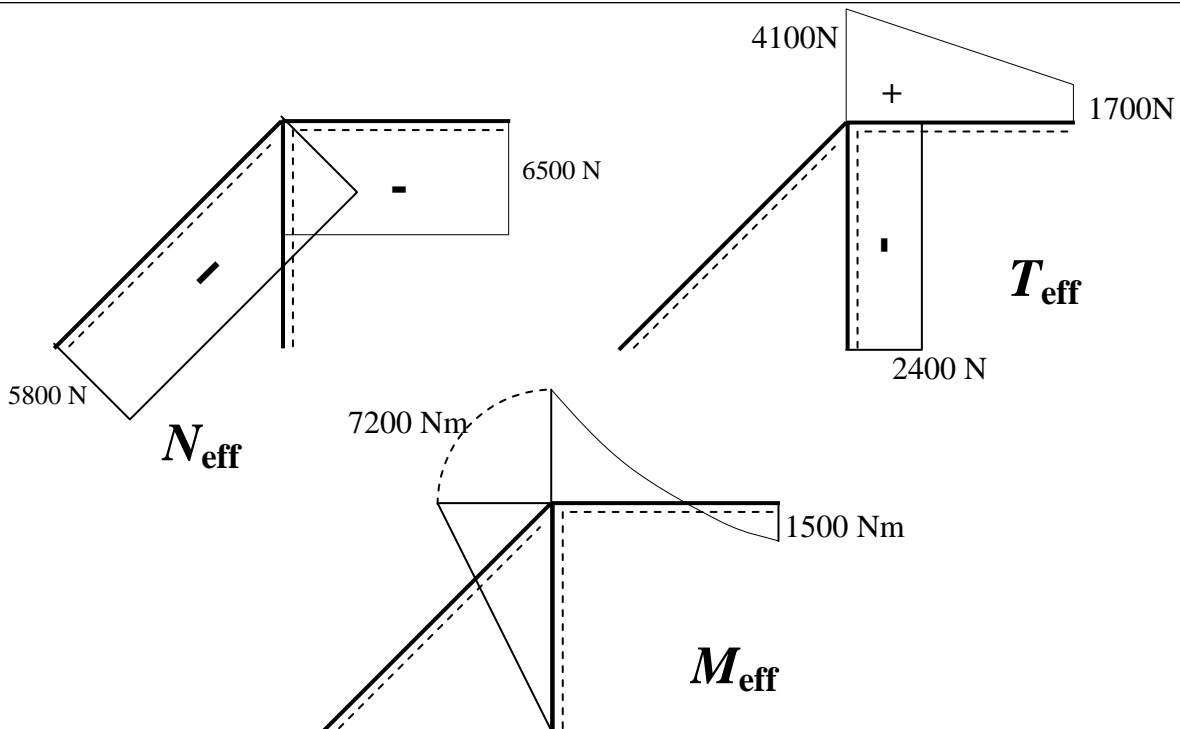
Problema virtuale

$$L_e^v = 1 \cdot \delta_c$$

$$L_i^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\int_0^{l\sqrt{2}} N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto } d-b} = \frac{7pl^4}{24EI} + X \frac{l^3}{3EI} + 2l\alpha T_m$$

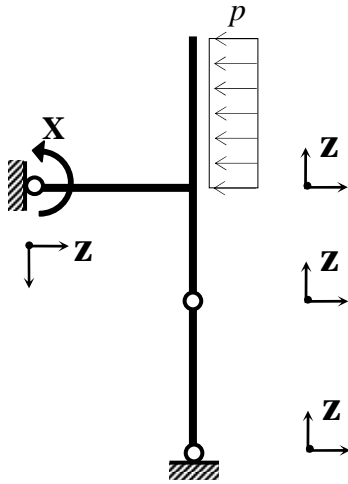
$$L_e^v = L_i^v \Rightarrow X = -\frac{7pl}{8} - \frac{6EI}{l^2} \alpha T_m + \frac{3EI}{l^3} \delta_a = -1700 \text{ N}$$

### 1.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI



## 2.

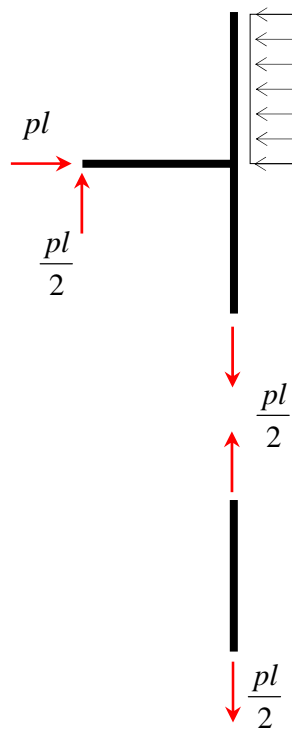
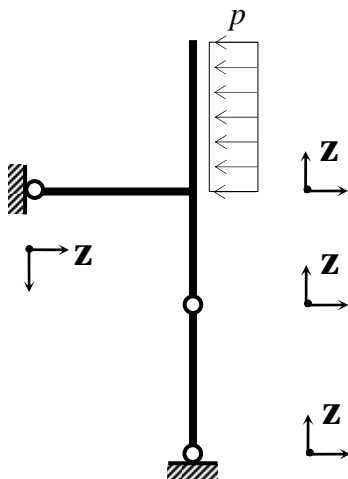
### 2.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE

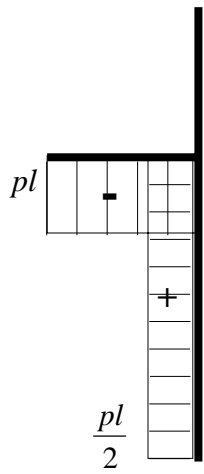


*Equazione implicita di congruenza:*

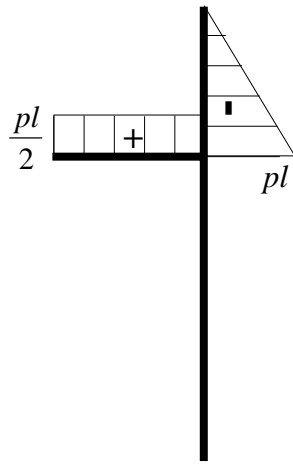
$$\theta_a(X) = -\varphi_a$$

### 2.2 PROBLEMA '0'

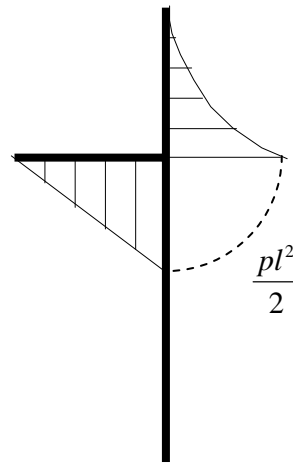




$N_0$

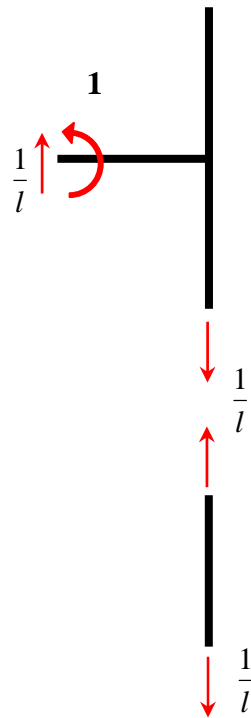
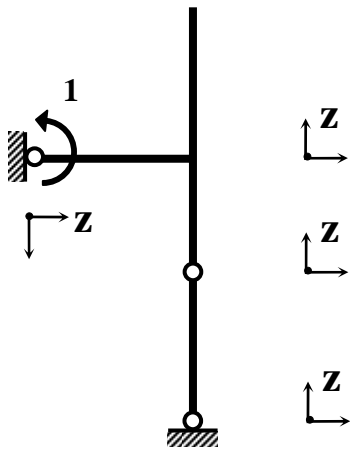


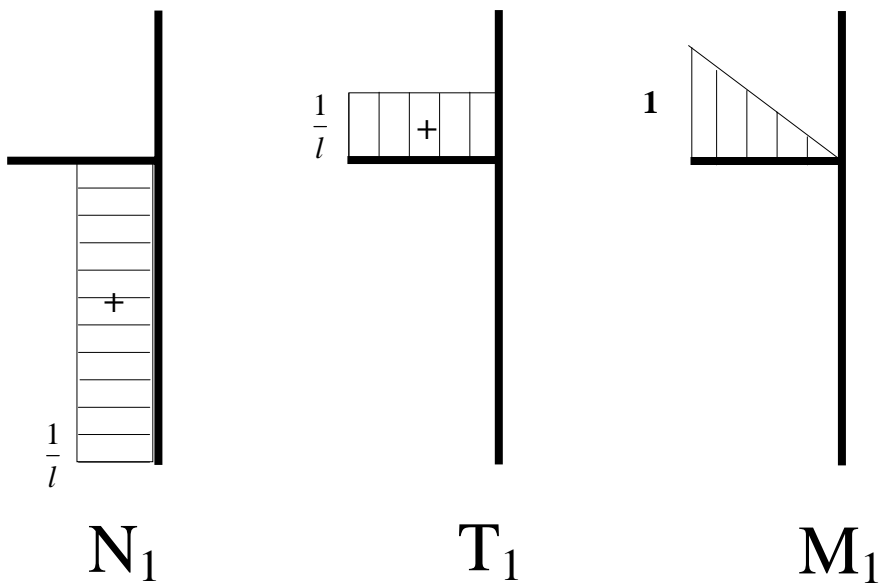
$N_0$



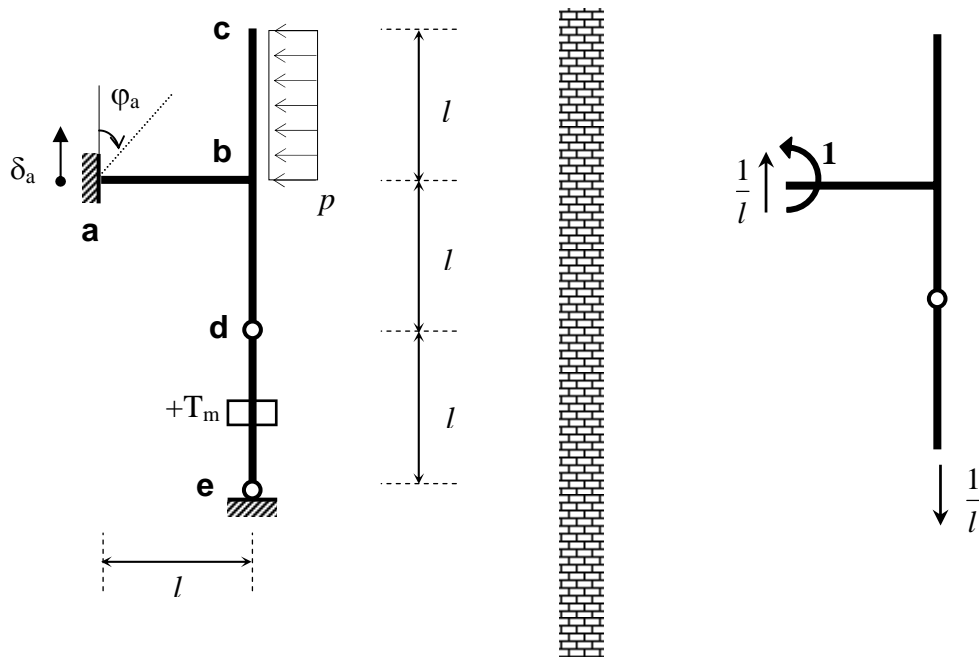
$M_0$

2.3 PROBLEMA '1'





2.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico

Problema virtuale

$$L_e^v = \frac{1}{l} \delta_a - 1 \cdot \varphi_a = \frac{\delta_a}{l} - \frac{2\delta_a}{l} = -\frac{\delta_a}{l}$$



$$L_1^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto a-b}} + \underbrace{\int_0^l N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto e-d}} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_0 dz + \frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2 dz + \alpha T_m$$

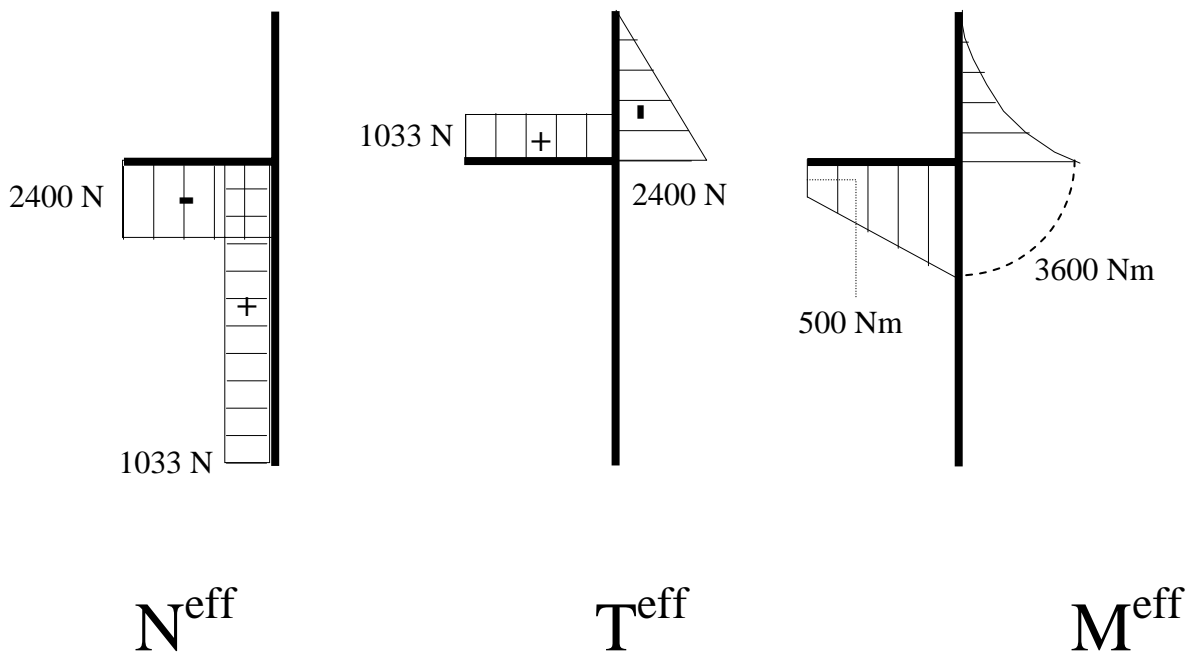
$$\int_0^l M_1 M_0 dz = \int_0^l \left( -1 + \frac{z}{l} \right) \left( \frac{pl}{2} z \right) dz = -\frac{pl^3}{12}$$

$$\int_0^l M_1^2 dz = \int_0^l \left( -1 + \frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{l}{3}$$

$$L_e^v = L_1^v \Rightarrow -\frac{\delta_a}{l} = -\frac{pl^2}{12EI} + \frac{Xl}{3EI} + \alpha T_m$$

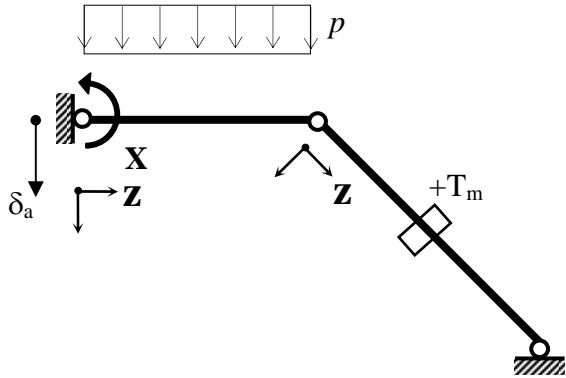
$$X = \frac{pl^2}{4} - \frac{3EI}{l} \alpha T_m - \frac{3EI}{l^2} \delta_a = -500 \text{ Nm}$$

## 2.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI TOTALI



### 3.

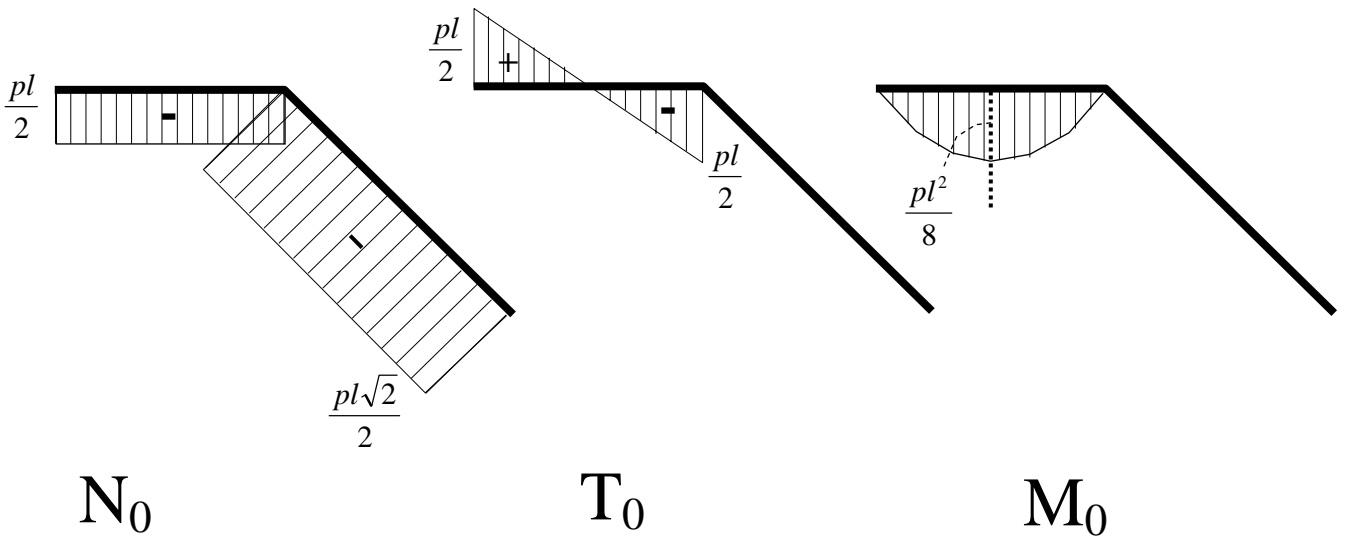
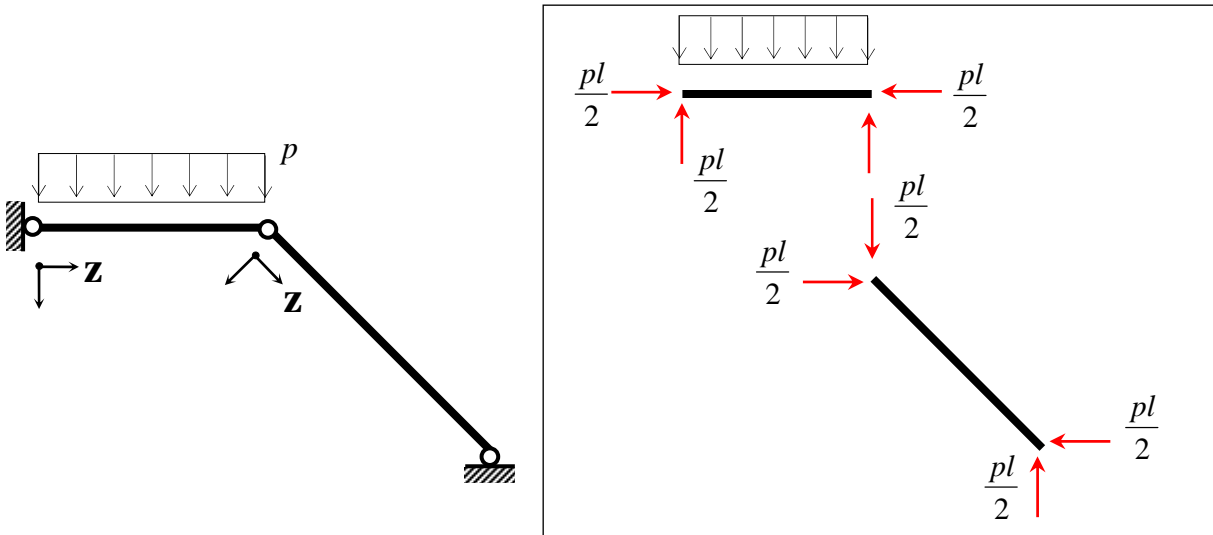
#### 3.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE



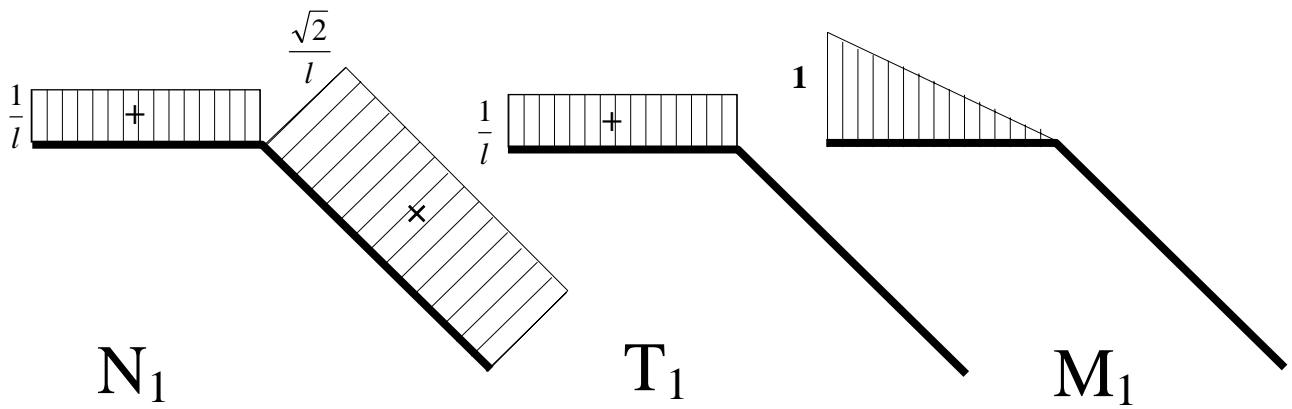
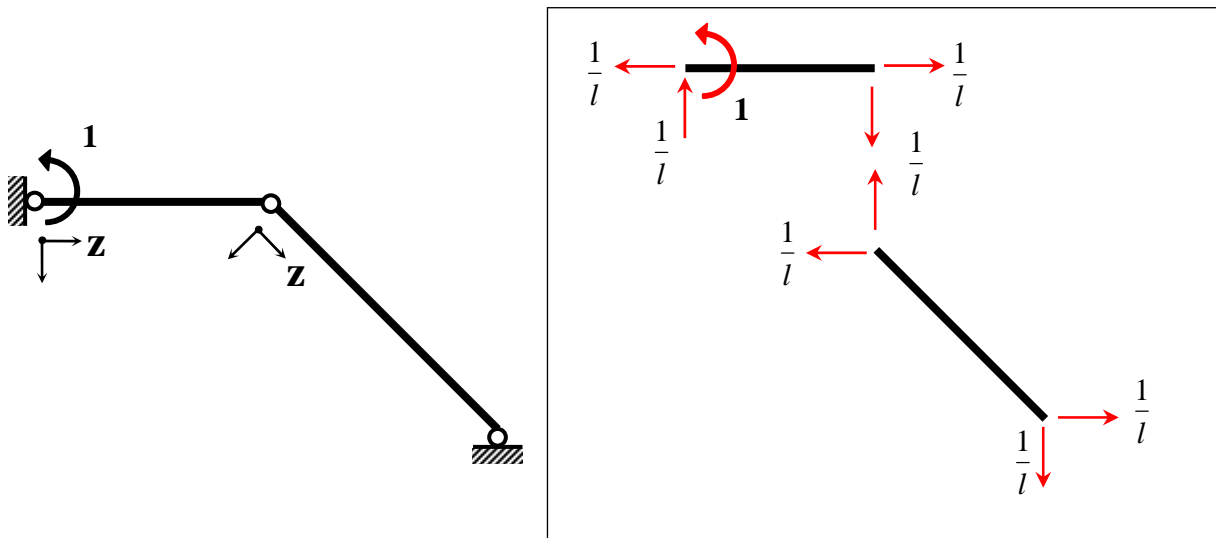
Equazione implicita di congruenza:

$$\theta_a(\mathbf{X})=0$$

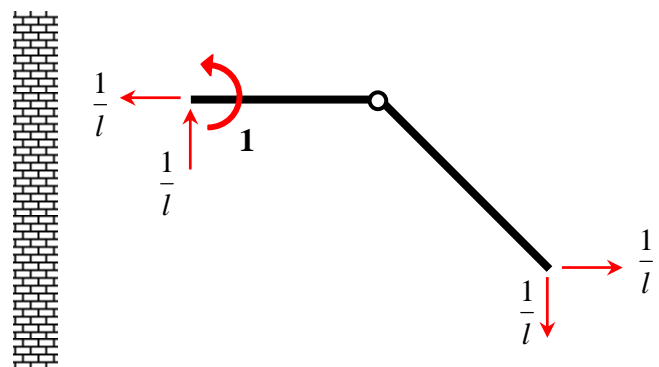
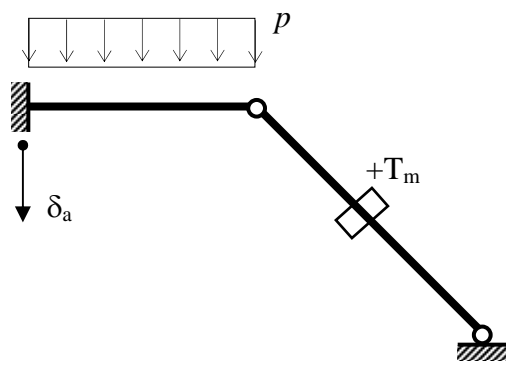
#### 3.2 PROBLEMA '0'



### 3.3 PROBLEMA '1'



### 3.4 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico

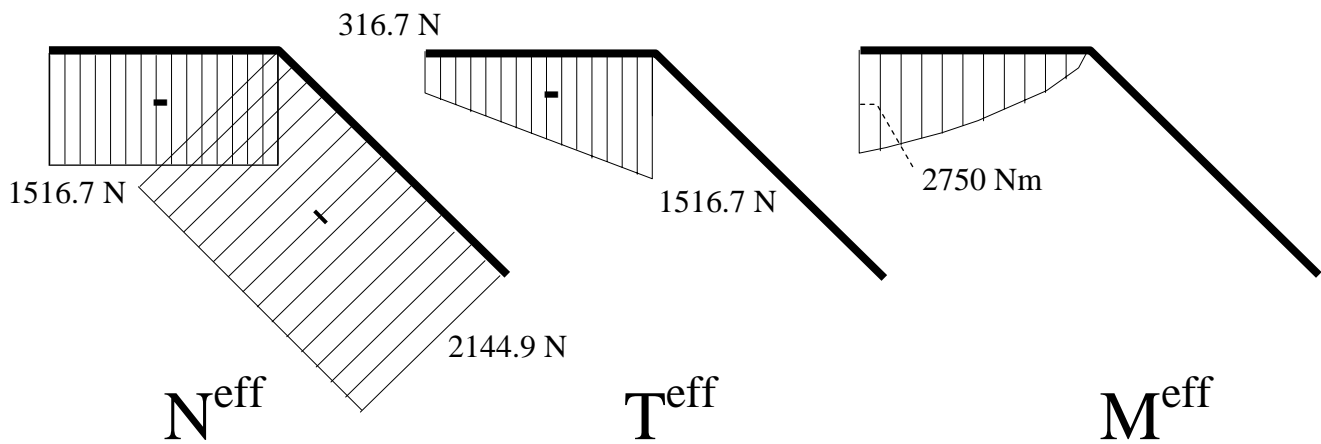
Problema virtuale

$$L_c^v = -\frac{1}{l} \delta_a$$

$$L_i^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{M_0(z) + X M_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto a-b}} + \underbrace{\int_0^{l\sqrt{2}} N_1(z) \alpha T_m dz}_{\text{tratto b-c}} = -\frac{pl^3}{24EI} + X \frac{l}{3EI} + 2\alpha T_m$$

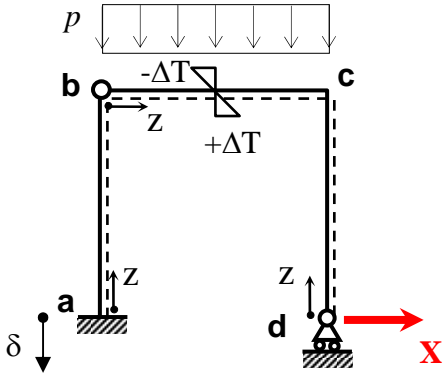
$$L_e^v = L_i^v \Rightarrow X = \frac{pl^2}{8} - \frac{6EI}{l} \alpha T_m - \frac{3EI}{l^2} \delta_a = -2750 \text{ Nm}$$

### 3.5 DIAGRAMMI EFFETTIVI TOTALI



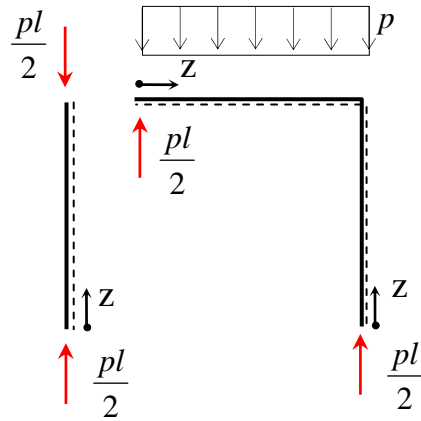
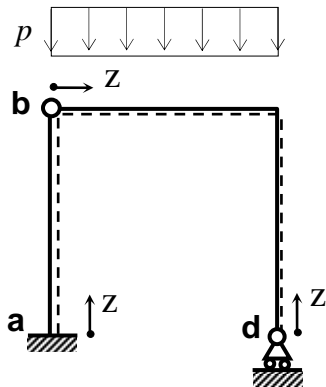
# 4.

## 1.0 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE

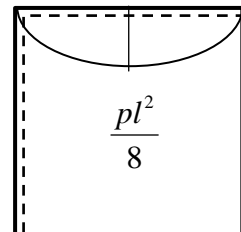


Equazione di congruenza:  
 $w_d(X) = 0$

## 1.1 PROBLEMA '0'

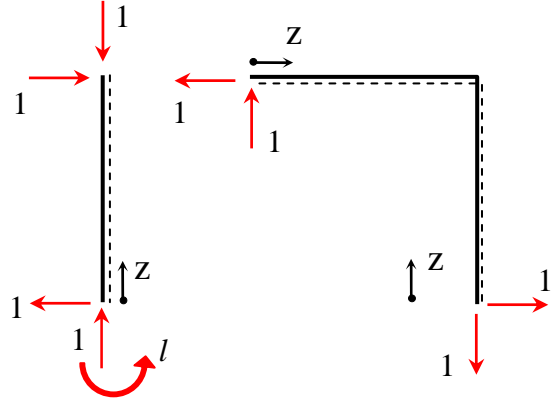
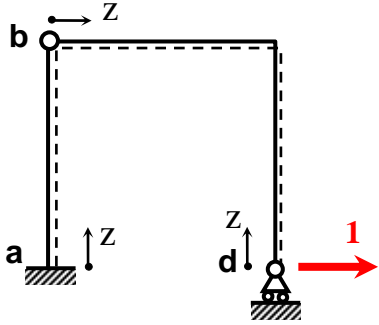


$$\begin{cases} \text{Tratto } ab: & M_0(z) = 0 \\ \text{Tratto } bc: & M_0(z) = \frac{pl}{2}z - \frac{pz^2}{2} \\ \text{Tratto } cd: & M_0(z) = 0 \end{cases}$$

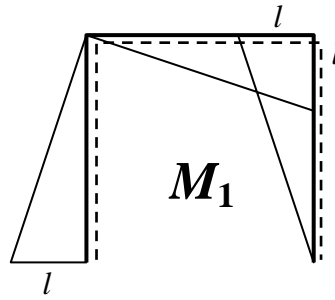


$M_0$

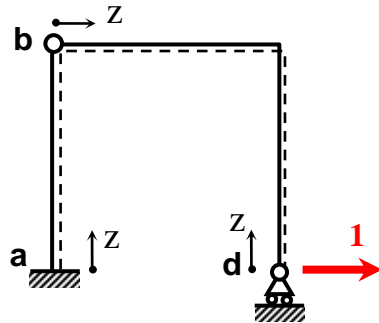
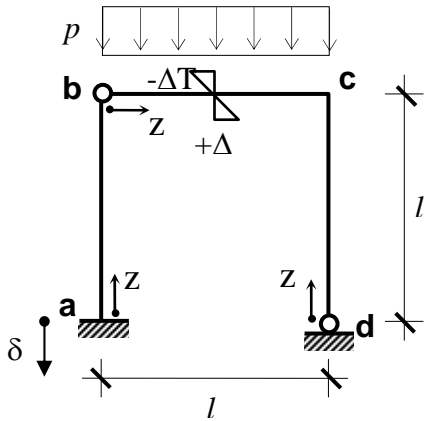
## 1.2 PROBLEMA '1'



$$\begin{cases} \text{Tratto } ab: & M_1(z) = -l + z \\ \text{Tratto } bc: & M_1(z) = z \\ \text{Tratto } cd: & M_1(z) = -z \end{cases}$$



## 1.3 EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI



Problema cinematico

Problema virtuale

$$L_e^v = -1 \cdot \delta$$

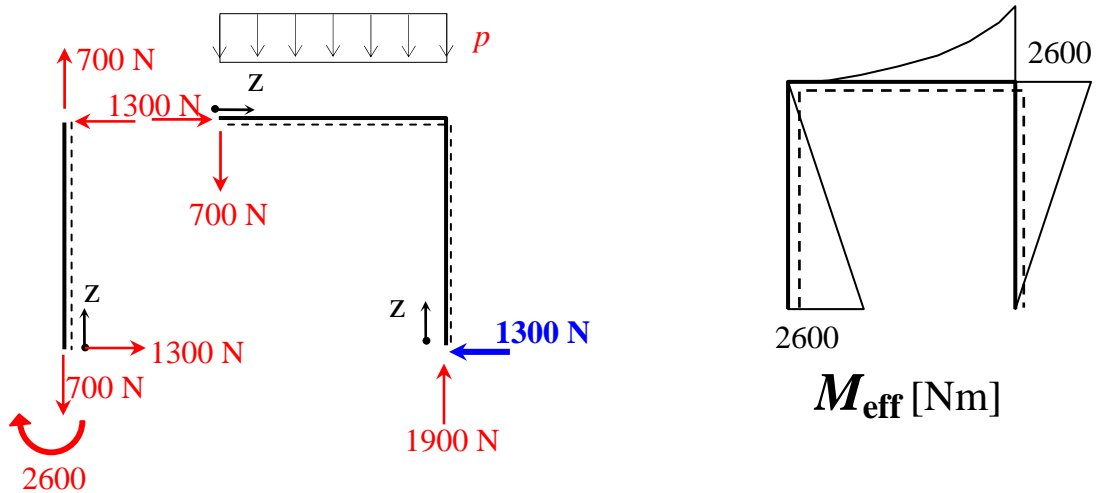
$$L_1^v = \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{\cancel{M_0(z)} + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} + \chi_T \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{\cancel{M_0(z)} + XM_1(z)}{EI} \right) dz}_{\text{tratto } c-d}$$

$$L_1^v = \underbrace{\frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2(z) dz}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\int_0^l M_1(z) \left( \frac{M_0(z) + XM_1(z)}{EI} + \chi_T \right) dz}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{\frac{X}{EI} \int_0^l M_1^2(z) dz}_{\text{tratto } c-d}$$

$$L_1^v = \underbrace{X \frac{l^3}{3EI}}_{\text{tratto } a-b} + \underbrace{\frac{pl^4}{24EI} + \frac{\chi_T l^2}{2}}_{\text{tratto } b-c} + \underbrace{X \frac{l^3}{3EI}}_{\text{tratto } c-d} = \frac{pl^4}{24EI} + \frac{\chi_T l^2}{2} + X \frac{l^3}{EI}$$

$$L_e^v = L_1^v \Rightarrow X = -\frac{pl}{24} - \frac{EI}{2l} \chi_T - \frac{EI}{l^3} \delta = -1300 \text{ N}$$

#### 1.4 REAZIONI E DIAGRAMMI EFFETTIVI



# 5.

Lo svolgimento è lasciato al lettore che può confrontare la propria soluzione con quanto segue.

## 4.1 SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE E INCOGNITA IPERSTATICA

Il valore dell'incognita iperstatica relativa al sistema isostatico principale in figura è

$$X = \frac{21}{64} pl + \frac{3EI}{8l^3} \delta_a = +870 \text{ N}$$

