

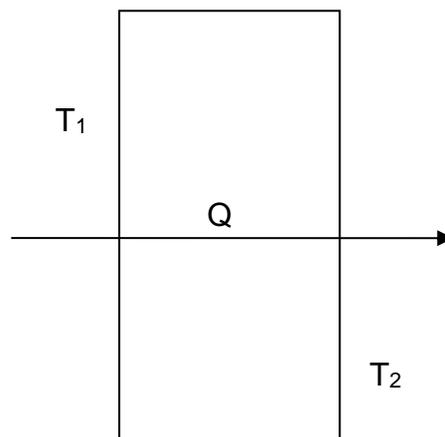
***Parte II***

# ***TRASMISSIONE DEL CALORE***

## CONDUZIONE TERMICA

La conduzione è il meccanismo di scambio termico che ha luogo tra corpi a contatto o tra due regioni dello stesso mezzo solido o fluido a diversa temperatura. Il meccanismo di trasferimento del calore avviene con modalità diverse a seconda della natura fisica del corpo. In particolare, nei gas, essendo la temperatura l'indice macroscopico dell'agitazione molecolare interna, il trasferimento di energia termica avviene per diffusione atomica e molecolare mediante trasferimento di energia cinetica attraverso gli urti tra le molecole. Nei liquidi e nei solidi dielettrici il trasferimento di energia avviene per mezzo di onde elastiche che si originano a causa di vibrazioni del reticolo cristallino. Nei metalli, infine, che sono i migliori conduttori di calore, il fenomeno consiste prevalentemente nella diffusione di elettroni liberi, che, muovendosi da una regione all'altra, trasmettono attraverso urti l'energia cinetica, quindi il calore. In tutti i casi il meccanismo di scambio termico non è mai accompagnato da moti relativi macroscopici delle particelle che compongono il materiale. Il fenomeno di scambio termico conduttivo produce in definitiva un livellamento delle temperature inizialmente disuguali.

Ipotizziamo ora di considerare una lastra piana di spessore  $L$  sottoposta ad una differenza di temperatura tra le sue facce estreme, come rappresentato nella figura 1.



**Figura 1: Conduzione monodimensionale in una lastra piana**

Le due superfici estreme della lastra siano isoterme, quella di sinistra a temperatura  $T_1$  e quella di destra a temperatura  $T_2$ . In questa ipotesi la potenza termica si trasmette secondo un'unica direzione, quella perpendicolare alle due facce considerate. Il fenomeno è dunque da considerarsi *monodimensionale*. Se per ipotesi  $T_1 > T_2$ , la potenza termica  $\dot{Q}$  attraversa la lastra nel verso delle temperature decrescenti, cioè da sinistra a destra.

Supponiamo inoltre che il materiale sia *omogeneo* ed *isotropo*: la prima ipotesi ha per conseguenza un comportamento termico del materiale indipendente dalla posizione in cui lo si valuta, mentre la seconda indica che il materiale si comporta alla stessa maniera indipendentemente dalla direzione in cui il calore lo attraversa. L'omogeneità e l'isotropia consentono di definire le prestazioni termiche del materiale con un'unica grandezza, detta *conducibilità o conduttività termica*.

Supponiamo infine di mantenere costanti nel tempo le due temperature  $T_1$  e  $T_2$  che causano il trasferimento di calore. In queste condizioni il fenomeno risulta essere *stazionario* o *permanente*, ossia con caratteristiche termiche che non variano nel tempo.

In queste ipotesi, cioè in presenza di un fenomeno monodimensionale e stazionario che avviene in una lastra piana di materiale omogeneo ed isotropo, possiamo scrivere il

postulato di Fourier, che permette di determinare la potenza termica conduttiva scambiata, nel modo seguente:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dX}$$

dove:

$\dot{Q}$ : potenza termica scambiata (W);

A: area della sezione perpendicolare al flusso termico (m<sup>2</sup>);

$\lambda$ : conducibilità termica del materiale (W/mK);

dT/dx: gradiente termico (K/m).

Dividendo entrambi i membri per A si ottiene un'altra espressione dello stesso postulato in cui compare il flusso termico  $\Phi$ , cioè la potenza termica scambiata per unità di area (W/m<sup>2</sup>):

$$\Phi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dX}$$

La conducibilità termica descrive il comportamento termico del materiale; come già detto, le caratteristiche di omogeneità e di isotropia di quest'ultimo consentono di usare un unico valore di  $\lambda$  per definire il comportamento termico in ogni punto ed in qualsiasi direzione.

La conducibilità termica può essere definita come *“la potenza termica scambiata per conduzione per unità di spessore e per unità di salto termico”* dal materiale considerato. Essa in generale dipende, per i vari materiali, sia dalla temperatura che dalla pressione, ma nella quasi totalità dei casi pratici tale dipendenza può essere trascurata e la conduttività può essere considerata costante.

I materiali che offrono maggior resistenza al flusso termico, cioè i cattivi conduttori, sono caratterizzati da valori molto bassi della conduttività: rientrano in questa categoria i materiali isolanti o coibenti termici. Tra questi, quelli finora più comunemente impiegati in edilizia (EPS, XPS, lana di roccia, lana di vetro, sughero etc.) hanno valori di conducibilità compresi all'incirca tra  $\lambda = 0,03 \div 0,045 \frac{W}{m \cdot K}$ . Oggi, la moderna tecnologia ha messo a punto materiali isolanti innovativi che realizzano valori ancora inferiori di conducibilità termica. In particolare l'AEROGEL ( $\lambda = 0,015 \frac{W}{m \cdot K}$ ) ed i pannelli VIP (Vaccum Insulated Panel), questi ultimi caratterizzati da valori di conducibilità compresi tra 0,002 e 0,007  $\frac{W}{m \cdot K}$ .

Si rimanda a testi più specialistici per una trattazione accurata delle caratteristiche di tali materiali.

Al contrario i materiali metallici, che conducono efficacemente il calore, presentano valori della conduttività notevolmente più elevati. Per essi, si ha infatti:

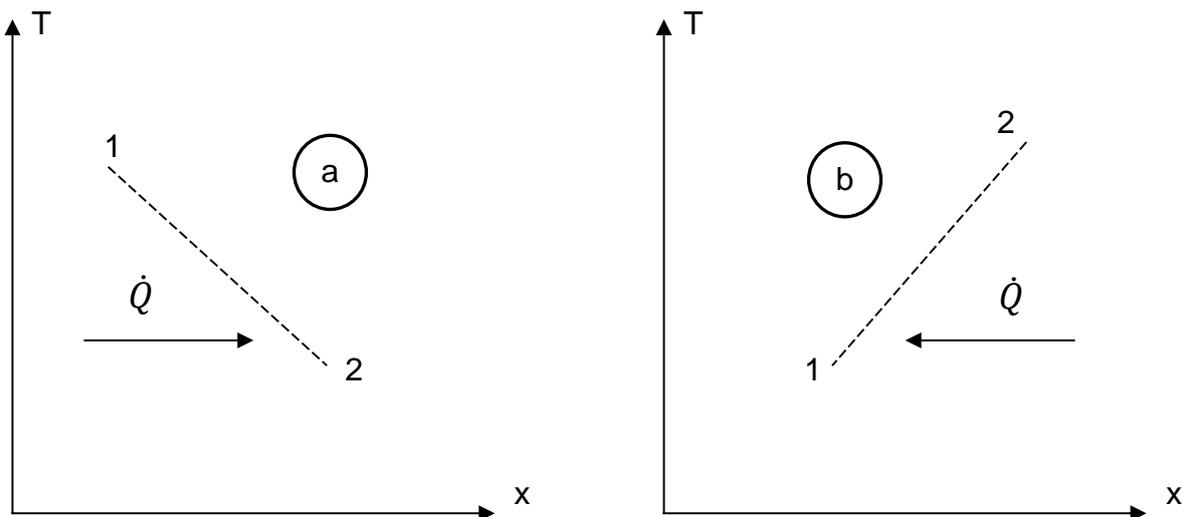
$$\lambda = 200 \div 400 \frac{W}{m \cdot K}$$

L'aria stagnante presenta valori della conducibilità termica tra i più bassi in assoluto e sarebbe, per questo, un ottimo isolante totalmente gratuito, ma in pratica non è possibile

mantenere l'aria ferma all'interno di intercapedini delle dimensioni di qualche centimetro, come quelle che si possono trovare nelle pareti, poiché la presenza di differenze di temperatura all'interno di tali sezioni, innesca, come vedremo in seguito, altri meccanismi di scambio termico che inibiscono il potere termoisolante dell'aria. Nei materiali isolanti, che sono costituiti da una matrice solida e da piccole inclusioni d'aria o di altri gas, le dimensioni molto ridotte delle cellette chiuse che contengono l'aria stessa consentono di realizzare situazioni favorevoli in cui questa rimane pressoché stagnante e conferisce all'intero materiale un'elevata resistenza termica.

Il gradiente di temperatura  $dT/dx$  indica la variazione di temperatura per unità di spessore attraversato, cioè la rapidità con cui la temperatura cresce o decresce all'interno del materiale. In altre parole esso esprime la derivata della funzione che descrive l'andamento delle temperature all'interno del corpo quindi fornisce la pendenza di tale curva rispetto allo spessore. Un elevato valore del gradiente termico comporta una notevole variazione di temperatura nell'unità di spessore, cioè una pendenza elevata della sua curva di decadimento. Al contrario, un piccolo valore del gradiente termico indica una piccola variazione di temperatura nell'unità di spessore con una conseguente ridotta pendenza della curva di decadimento della temperatura stessa.

Il segno meno indica che potenza termica e gradiente sono sempre discordi per cui la potenza viene sempre trasmessa in verso opposto rispetto a quello in cui crescono le temperature.



**Figura 2: Potenza e gradiente termico opposti in segno**

Nello schema (a) della figura 2 la temperatura decresce nel verso positivo delle  $x$ , quindi il gradiente è negativo, mentre la potenza termica va da 1 a 2 per cui è positiva, poiché concorde con il verso positivo delle  $x$ . Si ha pertanto:

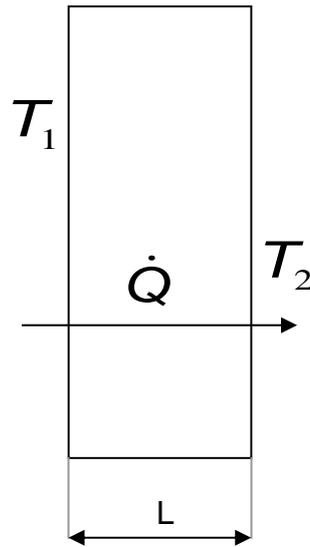
$$dx > 0 \text{ e } dT < 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} < 0 \Rightarrow \dot{Q} > 0$$

Al contrario, nello schema (b) di figura 2 la temperatura cresce nel verso positivo delle  $x$ , per cui la potenza va secondo il verso negativo dello stesso asse  $x$  e si ha:

$$dx > 0 \text{ e } dT > 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} > 0 \Rightarrow \dot{Q} < 0$$

La potenza termica ed il gradiente risultano pertanto sempre discordi in segno. Da un punto di vista fisico questo significa essenzialmente che il calore viene trasmesso sempre nel verso delle temperature decrescenti, nel pieno rispetto del II Principio della Termodinamica.

Il postulato di Fourier consente di calcolare la potenza o il flusso termico trasmessi in regime stazionario monodimensionale da una parete piana omogenea ed isotropa di spessore  $L$  sottoposta ad una differenza di temperatura  $T_1 - T_2$ , con  $T_1 > T_2$ .



**Figura 3: Potenza termica scambiata per conduzione in una lastra piana**

Con riferimento alla figura 3 possiamo scrivere:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \Rightarrow \dot{Q} \cdot dx = -\lambda \cdot A \cdot dT \Rightarrow \int_0^L \dot{Q} \cdot dx = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda \cdot A \cdot dT$$

Come già accennato, con buona approssimazione, la conducibilità termica può essere considerata costante rispetto alla temperatura per un ampio intervallo di valori e ciò consente di portare la  $\lambda$  fuori dal segno di integrale; analogamente la  $A$  è costante rispetto a  $T$ , mentre la stazionarietà del fenomeno permette di considerare la potenza termica indipendente dalla  $x$ . Si ha in definitiva:

$$\dot{Q} \cdot \int_0^L dx = -\lambda \cdot A \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \dot{Q} \cdot L = -\lambda \cdot A \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow \dot{Q} \cdot L = \lambda \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

Da cui la potenza termica ed il flusso termico valgono rispettivamente:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda \cdot A \cdot (T_1 - T_2)}{L}$$

$$\Phi = \frac{\lambda \cdot (T_1 - T_2)}{L}$$

Si definiscono a questo punto le seguenti grandezze:

$C = \frac{\lambda \cdot A}{L}$	$\left[ \frac{W}{K} \right]$	Conduttanza conduttiva
$C_u = \frac{\lambda}{L}$	$\left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$	Conduttanza conduttiva unitaria
$R = \frac{1}{C} = \frac{L}{\lambda \cdot A}$	$\left[ \frac{K}{W} \right]$	Resistenza conduttiva
$R_u = \frac{1}{C_u} = \frac{L}{\lambda}$	$\left[ \frac{m^2 \cdot K}{W} \right]$	Resistenza conduttiva unitaria

che permettono di scrivere le espressioni della potenza termica e del flusso termico nelle seguenti maniere tra loro equivalenti:

$$\dot{Q} = C \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q} = C_u \cdot A \cdot \Delta T \quad \Phi = C_u \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_u} \cdot A \cdot \Delta T \quad \Phi = \frac{\Delta T}{R_u}$$

I materiali isolanti sono caratterizzati ovviamente da elevati valori della resistenza, mentre i buoni conduttori, come i metalli, sono caratterizzati da elevati valori della conduttanza.

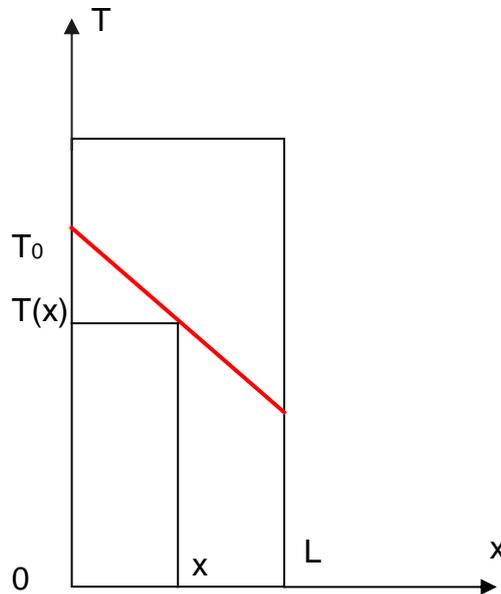
Il postulato di Fourier consente inoltre di calcolare, all'interno della lastra piana di materiale omogeneo ed isotropo, l'andamento delle temperature in regime stazionario e monodimensionale.

Si consideri, a questo proposito, una lastra piana di spessore L ed un sistema di assi cartesiani ortogonali che preveda in ascisse gli spessori ed in ordinate le temperature, come illustrato nella figura 4.

Siano  $T_0$  la temperatura della lastra sulla faccia corrispondente ad  $x = 0$  e  $T(x)$  la temperatura assunta all'interno della lastra in corrispondenza della generica sezione x.

Integrando tra 0 ed x l'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili che deriva dal postulato di Fourier, si ottiene:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dX} \Rightarrow \dot{Q} \cdot dx = -\lambda \cdot A \cdot dT \Rightarrow \int_0^x \dot{Q} \cdot dx = - \int_{T_0}^{T(x)} \lambda \cdot A \cdot dT$$



**Figura 4: Andamento delle temperature in una lastra piana**

A questo punto, applicando le ipotesi di stazionarietà del fenomeno e di costanza della conducibilità rispetto alla temperatura, si ottiene:

$$\dot{Q} \cdot \int_0^x dx = -\lambda \cdot A \cdot \int_{T_0}^{T(x)} dT \Rightarrow T(x) - T_0 = -\frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot A} \cdot x$$

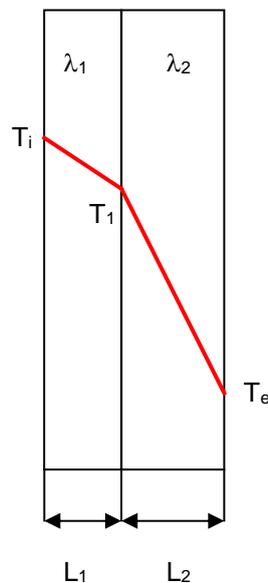
All'interno della lastra considerata si ha pertanto un andamento lineare delle temperature. L'equazione che si ottiene è infatti quella di una retta con termine noto  $T_0$  e con coefficiente

angolare pari a  $-\frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot A}$ .

Il coefficiente angolare risulta discorde in segno con la potenza termica ed è pertanto negativo se questa è positiva (temperature decrescenti nel verso positivo dell'asse  $x$ ) e positivo se, al contrario, la potenza termica è negativa (temperature crescenti con il verso positivo dell'asse  $x$ ). La pendenza della retta a parità di flusso termico trasmesso, è tanto più accentuata quanto più piccolo è il valore della conducibilità termica. In altre parole, una volta noto il flusso termico trasmesso dalla parete, se questa è costituita da materiale a bassa conducibilità termica (es. isolante) si ha al suo interno un decadimento della temperatura più repentino di quello che si avrebbe se fosse realizzata con un materiale a più elevata conducibilità.

## Resistenze conduttive in serie ed in parallelo

Consideriamo una parete composta da due strati di diverso spessore e materiale, in ciascuno dei quali restino soddisfatte le condizioni di omogeneità e isotropia del materiale e di stazionarietà e monodimensionalità del fenomeno (cfr. Figura 5).



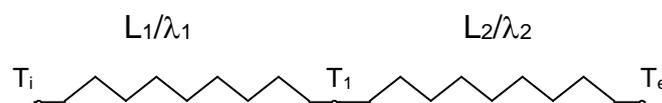
**Figura 5: Parete piana composta da due strati di materiali diversi**

Supponiamo che la parete nel suo complesso sia sottoposta ad un salto termico  $T_i - T_e$  e che all'interno di ciascuno dei due strati si abbia, in regime stazionario, un andamento termico lineare con pendenze diverse in funzione del diverso valore assunto dalla conducibilità termica. Sia  $T_1$  la temperatura che si instaura all'interfaccia tra i due strati.

È possibile applicare, in questo caso, il *metodo dell'analogia elettrica*, che prevede la corrispondenza tra il fenomeno termico nella configurazione descritta ed il fenomeno elettrico che si verifica in un circuito di due resistenze elettriche in serie disposte secondo lo schema della figura 6.

Esiste una perfetta analogia, rispettivamente, tra la differenza di potenziale elettrico e la differenza di temperatura, la corrente elettrica ed il flusso termico, ed infine tra la resistenza elettrica e quella termica unitaria.

Facendo riferimento alla figura seguente, la resistenza unitaria del primo strato, rappresentata dalla prima resistenza elettrica, vale  $L_1/\lambda_1$ , mentre la seconda vale  $L_2/\lambda_2$ .



**Figura 6: Analogia elettrica per due strati in serie**

La potenza termica che attraversa la parete, che, per la stazionarietà del fenomeno, risulta uguale a quella che attraversa ogni suo strato, può essere calcolata come segue:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1 \cdot A}{L_1} \cdot (T_i - T_1) \Rightarrow (T_i - T_1) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{L_1}{\lambda_1}$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_2 \cdot A}{L_2} \cdot (T_1 - T_e) \Rightarrow (T_1 - T_e) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{L_2}{\lambda_2}$$

Ne consegue:

$$(T_i - T_1) = \Phi \cdot \frac{L_1}{\lambda_1}$$

$$(T_1 - T_e) = \Phi \cdot \frac{L_2}{\lambda_2}$$

---


$$(T_i - T_e) = \Phi \cdot \left( \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right)$$

Poiché nella configurazione di due o più resistenze in serie la resistenza elettrica totale si ottiene sommando le singole resistenze, in modo del tutto analogo, sommando le singole resistenze termiche unitarie, si ottiene la resistenza termica unitaria totale:

$$R_{u,tot} = R_{u,1} + R_{u,2} = \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}$$

da cui l'espressione del flusso e della potenza termica che valgono, rispettivamente:

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_i - T_e) \quad e \quad \dot{Q} = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot A \cdot (T_i - T_e)$$

Il risultato così ottenuto può ovviamente essere generalizzato al caso di una parete multistrato con numero di strati pari ad n, per il quale la resistenza termica unitaria totale vale:

$$R_{u,tot} = \sum_{i=1}^n R_{u,i} = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i}$$

Facendo riferimento alla parete a due strati della figura 5, è possibile determinare la temperatura intermedia  $T_1$  uguagliando i flussi nell'intera parete e nel primo strato nel modo seguente:

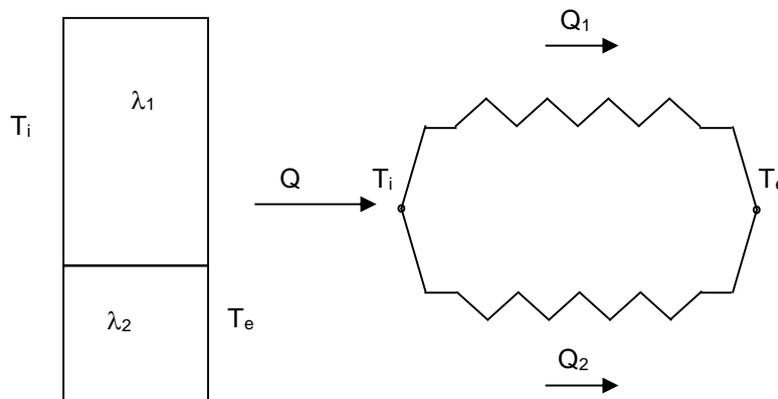
$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_i - T_e) = \frac{1}{R_{u,1}} \cdot (T_i - T_1) \Rightarrow (T_i - T_1) = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_i - T_e) \cdot R_{u,1}$$

da cui:

$$(T_i - T_1) = \frac{(T_i - T_e)}{R_{u,tot}} \cdot \frac{L_1}{\lambda_1} \Rightarrow T_1 = T_i - \frac{(T_i - T_e)}{R_{u,tot}} \cdot \frac{L_1}{\lambda_1}$$

In seguito si vedrà come, in una parete multistrato, ciascuna temperatura intermedia interna può essere calcolata sottraendo alla temperatura maggiore una quantità data dal flusso termico per la resistenza unitaria incontrata fino alla sezione corrispondente.

Una parete può essere costituita da uno o più strati disposti in parallelo come nella figura seguente, in cui viene rappresentato lo schema elettrico grazie al quale è possibile risolvere il problema con il metodo dell'analogia elettrica.



**Figura 7: Parete piana composta da due strati in parallelo ed analogia elettrica**

In questo caso la potenza termica  $\dot{Q}$  si ripartisce nei due strati in modo inversamente proporzionale alle resistenze termiche offerte. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 &= \frac{\lambda_1 \cdot A_1}{L} \cdot (T_i - T_e) + \frac{\lambda_2 \cdot A_2}{L} \cdot (T_i - T_e) = \left( \frac{\lambda_1 \cdot A_1}{L} + \frac{\lambda_2 \cdot A_2}{L} \right) \cdot (T_i - T_e) \\ &= (C_1 + C_2) \cdot (T_i - T_e) \end{aligned}$$

In definitiva, quando due resistenze termiche sono poste in parallelo, la potenza termica scambiata si calcola con una formula del tipo:

$$\dot{Q} = C_{tot} \cdot (T_i - T_e)$$

in cui:

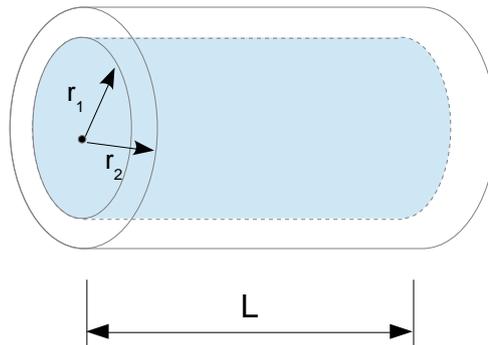
$$C_{tot} = C_1 + C_2$$

La conduttanza termica totale è dunque pari alla somma delle singole conduttanze. Ovviamente questa proprietà può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di strati disposti in parallelo.

### **Conduzione stazionaria in geometria cilindrica**

Il fenomeno di conduzione termica può avvenire nello spessore di un tubo (cilindro cavo) all'interno del quale scorre un fluido a temperatura diversa dall'ambiente esterno (es: acqua calda in un impianto di riscaldamento, aria in un canale a sezione circolare di un impianto di climatizzazione). Se il tubo è sufficientemente lungo tanto da trascurare gli effetti di bordo e delimitato da due superfici isoterme a temperature differenti, si può ipotizzare che lo scambio termico avvenga solo nella direzione radiale, quindi che sia monodimensionale. Se poi le temperature interna ed esterna al tubo sono costanti nel tempo il fenomeno avviene in regime stazionario.

Facendo riferimento alla figura 8 seguente, consideriamo un tubo a sezione circolare di raggio interno  $r_1$  e raggio esterno  $r_2$ , lunghezza  $L$  e conducibilità termica  $\lambda$ , delimitato da due superfici isoterme a temperature, rispettivamente,  $T_1$  e  $T_2$ .



**Figura 8: Conduzione termica in geometria cilindrica**

In tale configurazione la temperatura all'interno dello spessore del tubo varia radialmente

$$T = T(r)$$

mentre il postulato di Fourier può essere scritto nella forma seguente:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \quad [W]$$

Risolvendo l'equazione, si ha:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{Q} \cdot dr = -\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dT \Rightarrow$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot r \cdot L} \cdot dr = -\int_{T_1}^{T_2} \lambda \cdot dT$$

Per la stazionarietà del fenomeno si può portare la  $\dot{Q}$  fuori dal segno di integrale, ed analogamente la conducibilità può essere portata fuori dall'integrale potendola di solito considerare indipendente dalla temperatura. Pertanto si ottiene:

$$\frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot dr = -\lambda \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow$$

$$\dot{Q} = 2\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Analogamente a quanto fatto per la geometria piana, anche per problemi di geometria cilindrica, si possono definire la conduttanza C e la relativa resistenza termica R nel modo seguente:

$$C = \frac{2\pi \cdot L \cdot \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \left[ \frac{W}{K} \right]$$

$$R = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot L \cdot \lambda} \quad \left[ \frac{K}{W} \right]$$

Per cui si ha:

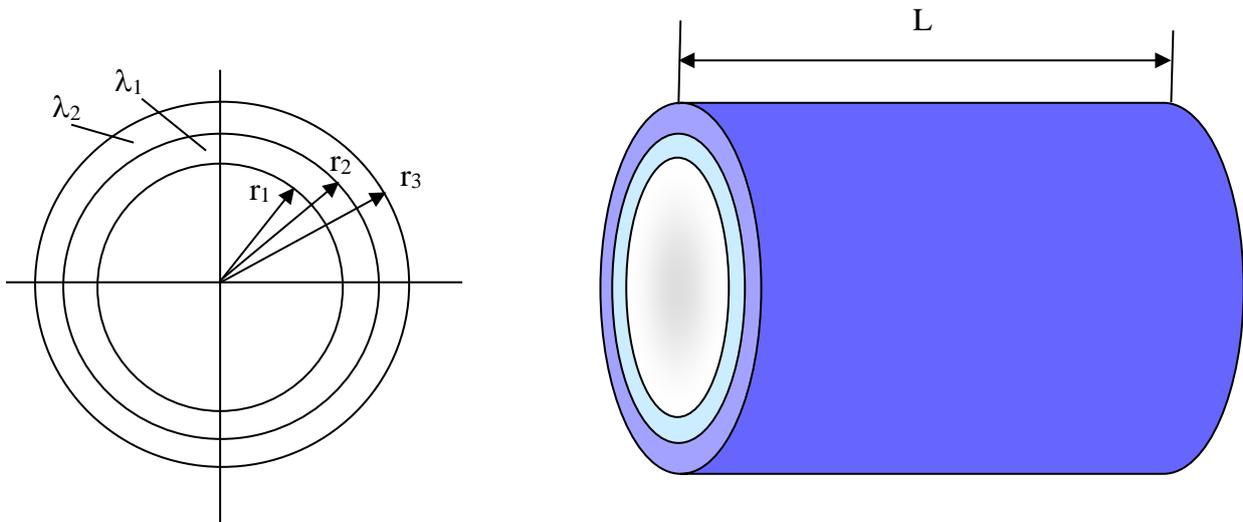
$$\dot{Q} = C \cdot (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$$

Non è possibile al contrario definire in generale conduttanza e resistenza unitarie dello strato cilindrico essendo variabile con il raggio la superficie perpendicolare alla direzione del flusso termico se non dopo aver fissato convenzionalmente la superficie di riferimento (interna o esterna).

### Conduzione stazionaria in geometria cilindrica multistrato

Il fenomeno termico conduttivo può avere luogo in una configurazione cilindrica multistrato quando più strati cilindrici sono disposti in modo coassiale, come accade ad esempio nel caso dei tubi della rete di circolazione di un impianto di riscaldamento ricoperti da uno strato di materiale isolante che produce la necessaria coibentazione in modo da limitare le dispersioni termiche verso l'esterno, o nel caso di un cavo elettrico rivestito da una guaina isolante.

Il problema può essere risolto ricorrendo anche in questo caso all'analogia elettrica e riconducendo la configurazione termica ad un sistema costituito da resistenze in serie, la cui somma permette di calcolare la resistenza totale.



**Figura 9: Strati cilindrici in serie**

Facendo riferimento allo schema della figura 9, per calcolare la potenza termica scambiata tra la superficie interna del primo strato e quella esterna del secondo strato si procede pertanto nel modo seguente:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{tot}}$$

dove:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_2} = \frac{1}{2\pi \cdot L} \cdot \left( \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2} \right)$$

Ovviamente la relazione può essere generalizzata al caso di n resistenze cilindriche in serie, calcolando la resistenza totale come somma di tutte le resistenze presenti:

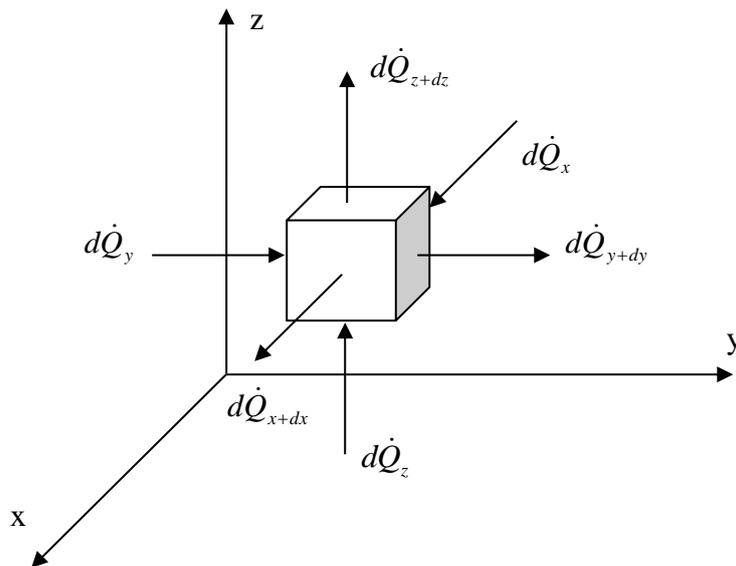
$$R_{tot} = \sum_{i=1}^n R_i = \frac{1}{2\pi \cdot L} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\lambda_i}$$

## Equazione generale della conduzione in geometria piana <sup>1</sup>

Consideriamo un sistema tridimensionale oggetto di scambio termico per conduzione. In generale la temperatura dipende dalle tre variabili spaziali  $x$ ,  $y$  e  $z$  e dalla variabile temporale  $t$ , per cui il campo termico sarà dato da:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Facciamo ora riferimento, sul diagramma  $x,y,z$ , ad un elemento di dimensioni infinitesime di un corpo sede del fenomeno conduttivo di volume  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  (cfr. Figura 10).



**Figura 10: Conduzione termica tridimensionale**

Applicando il I Principio della Termodinamica, in assenza di lavoro scambiato con l'esterno dall'elementino (non esistono pareti mobili e non ci sono alberi che raccolgono lavoro tecnico), la somma algebrica delle quantità di calore messe in gioco equivale alla variazione di energia interna del sistema.

La potenza termica scambiata per conduzione dal volume elementare  $dV$  con l'esterno (parte rimanente del sistema stesso) si valuta effettuando il bilancio termico tra ciò che entra e ciò che esce dall'elementino separatamente nelle tre direzioni. Si ipotizza inoltre che il materiale sia isotropo e che presenti, pertanto, un unico valore di conducibilità termica  $\lambda$ .

Nella direzione  $x$  si avrà:

$$d\dot{Q}_x = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

<sup>1</sup> Argomento di approfondimento facoltativo

$$d\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx$$

Dal bilancio termico lungo x si ottiene:

$$d\dot{Q}_x - d\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \left[ -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx \right] = \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Per analogia, nelle altre due direzioni, si ottengono le seguenti espressioni:

$$d\dot{Q}_y - d\dot{Q}_{y+dy} = -\lambda \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \left[ -\lambda \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\lambda \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dy \right] = \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$d\dot{Q}_z - d\dot{Q}_{z+dz} = -\lambda \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \left[ -\lambda \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\lambda \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot dz \right] = \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Si ipotizza inoltre che all'interno del corpo ci sia una generazione di calore  $d\dot{Q}_s$ .

Indicando con  $\dot{Q}_V$  la potenza termica generata internamente al corpo per unità di volume [W/m<sup>3</sup>], si ottiene:

$$d\dot{Q}_s = \dot{Q}_V \cdot dV = \dot{Q}_V \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

La variazione di energia interna dell'elementino di volume dV si può calcolare nel modo seguente:

$$dU = \rho \cdot dV \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Per cui, scrivendo il bilancio di energia, si ottiene:

$$\lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{Q}_V \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}_V}{\lambda} = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

in cui:

$\rho$ : densità del materiale [kg/m<sup>3</sup>]

$c$ : calore specifico del materiale [kJ/kg K]

Quella scritta è l'equazione generale della conduzione in regime tridimensionale che governa la distribuzione di temperatura ed il flusso termico in un solido con proprietà fisiche uniformi.

Introducendo la grandezza diffusività termica  $a$ , data dalla seguente espressione:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

e ipotizzando che non ci siano sorgenti interne di calore ( $\dot{Q}_v = 0$ ), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Se il regime è stazionario, si ottiene l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

In regime stazionario bidimensionale l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

che, risolta, fornisce l'andamento delle temperature  $T(x,y)$  da cui si può determinare il flusso termico nella due direzioni  $x$  ed  $y$ .

## CONVEZIONE TERMICA

La convezione termica è il meccanismo fondamentale di scambio termico tra un solido ed un fluido in movimento rispetto ad esso quando tra i due sistemi ci sia una differenza di temperatura. Essa presuppone uno scambio termico di tipo conduttivo tra il corpo e gli strati di fluido ad esso adiacenti ed il trasporto di energia in regioni più lontane grazie al moto macroscopico del fluido, detto appunto convettivo. Gli urti tra le particelle di fluido a diversa temperatura, quindi con un diverso contenuto di energia, permettono il trasferimento di energia da zone più calde a zone più fredde con conseguente tendenza ad un livellamento delle temperature all'interno del fluido.

Il moto del fluido è dunque una condizione imprescindibile perché avvengano scambi convettivi. Se esso viene provocato da cause naturali, quali la differenza di temperatura, si parla di *convezione naturale*, mentre si parlerà di *convezione forzata* se è provocato da un agente meccanico esterno, quale una pompa o un ventilatore. Lo scambio termico che avviene tra l'aria e la superficie calda di un radiatore oppure tra l'aria e la superficie interna di una parete a diversa temperatura sono tipici esempi di convezione naturale, mentre lo scambio termico tra l'acqua calda di un impianto di riscaldamento e la parete interna del tubo al cui interno fluisce, oppure tra l'aria e la parete di un canale di trasporto in un impianto di climatizzazione costituiscono esempi di convezione forzata, poiché in questi casi il moto del fluido è sempre provocato da un organo meccanico esterno (pompa di circolazione o ventilatore).

Nella convezione naturale la differenza di temperatura tra la superficie del corpo ed il fluido a contatto con esso provoca un riscaldamento o un raffreddamento degli strati di fluido adiacenti, con conseguente variazione della densità tra una zona e l'altra della massa di fluido. La densità dei fluidi infatti dipende dalla temperatura ed aumenta al diminuire di questa. Se ad esempio consideriamo l'aria a contatto con una superficie a temperatura più elevata, la cessione di calore da parte di quest'ultima provoca nell'aria un aumento di temperatura ed una conseguente diminuzione di densità. Questo innesca un moto ascensionale dell'aria che attira nuove quantità di fluido più fredde a contatto con la parete calda provocando in tal modo moti convettivi.

Al contrario, in un circuito idraulico o in un canale di distribuzione dell'aria per la climatizzazione ambientale, la pompa di circolazione o il ventilatore costituiscono la causa preponderante del moto ed il fenomeno convettivo che ne deriva è di tipo forzato.

I problemi di convezione termica sono descritti analiticamente dalle equazioni della fluidodinamica combinate con il principio della conservazione dell'energia (il principio della termodinamica). Si tratta di equazioni che presentano di solito notevoli difficoltà nella determinazione delle soluzioni analitiche, data la complessità geometrica e fluidodinamica del fenomeno; si adottano perciò spesso metodi numerici o sperimentali, questi ultimi associati all'analisi dimensionale, che permette di definire alcuni gruppi adimensionali in grado di descrivere il fenomeno in tutte le situazioni.

La relazione fondamentale utilizzata per lo studio della convezione termica, formulata da Newton nel 1701, è la seguente:

$$\dot{Q} = h_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty)$$

in cui:

$\dot{Q}$ : potenza termica scambiata per convezione (W);

$h_c$ : coefficiente medio di scambio termico convettivo ( $W/m^2K$ );

$A$ : area della superficie di scambio ( $m^2$ );

$T_s$ : temperatura della superficie a contatto con il fluido (K);

$T_\infty$ : temperatura del fluido indisturbato (K).

Anche nel caso della convezione si possono definire le grandezze conduttanza e resistenza nel modo seguente:

$$C = h_c \cdot A \quad \left[ \frac{W}{K} \right] \quad \text{Conduttanza convettiva}$$

$$C_u = h_c \quad \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \quad \text{Conduttanza convettiva unitaria}$$

$$R = \frac{1}{C} = \frac{1}{h_c \cdot A} \quad \left[ \frac{K}{W} \right] \quad \text{Resistenza convettiva}$$

$$R_u = \frac{1}{C_u} = \frac{1}{h_c} \quad \left[ \frac{m^2 \cdot K}{W} \right] \quad \text{Resistenza convettiva unitaria}$$

in funzione delle quali è possibile scrivere le espressioni della potenza termica e del flusso termico analogamente a quanto fatto per la conduzione.

Il problema fondamentale della convezione consiste nella determinazione, nelle varie situazioni, del coefficiente di scambio termico, che è una funzione delle proprietà fisiche del fluido, delle condizioni termo-fluidodinamiche del fenomeno e della geometria del sistema. Nella relazione di Newton, tale coefficiente è preso in valore medio. Infatti, in una configurazione di scambio convettivo, quale ad esempio quella della Figura 11 seguente, in cui aria a temperatura  $T_a$  scambia calore con una superficie a temperatura  $T_s$ , assume nelle diverse zone di contatto valori differenti, di cui  $h_c$  esprime la media spaziale.

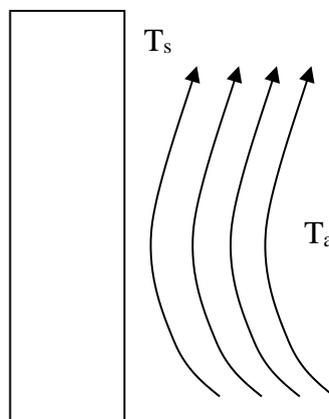


Figura 11: Scambio termico convettivo tra aria ed una parete

In convezione naturale la differenza di temperatura tra i due sistemi, essendo la causa fondamentale del moto del fluido, è anche il parametro che maggiormente influenza il valore numerico del coefficiente di scambio termico. In letteratura sono reperibili molte espressioni di  $h_c$  in funzione del  $\Delta T$  nelle varie configurazioni geometriche.

Al contrario, in un regime di convezione forzata, la velocità impressa al fluido dall'organo meccanico che lo pone in movimento è il parametro fondamentale da cui dipende il valore del coefficiente di scambio.

Le condizioni di moto del fluido possono essere caratterizzate da diverse configurazioni tipiche:

- **Flusso comprimibile:** si ha quando la densità del fluido è variabile in funzione di pressione e temperatura, come avviene nei gas.
- **Flusso incomprimibile:** è caratterizzato da un valore costante della densità rispetto alla temperatura e alla pressione. I liquidi possono essere considerati con ottima approssimazione fluidi incomprimibili.

Il grado di errore che si commette considerando un gas incomprimibile dipende da una grandezza dimensionale detta numero di MACH, che mette in relazione la velocità indisturbata del fluido  $u_\infty$ , considerata cioè ad una distanza dalla superficie tale da non risentire della sua presenza, con quella del suono  $c$  (pari a circa 344 m/s in aria in condizioni normali):

$$Ma = \frac{u_\infty}{c}$$

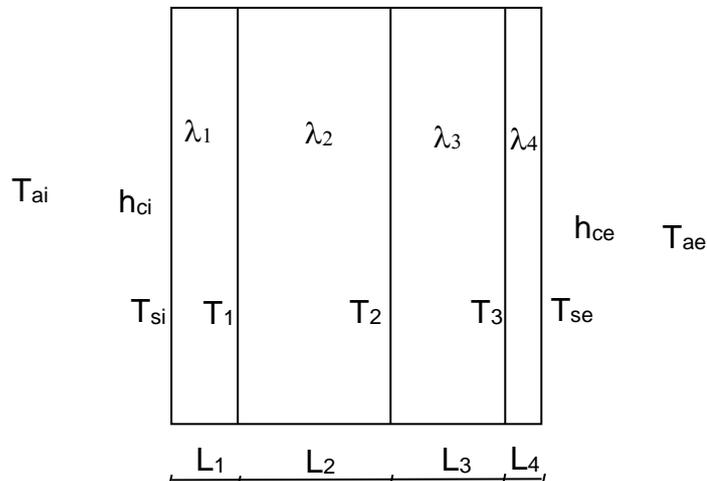
Per valori del numero di Mach inferiori a 0,3 il flusso si può ritenere con buona approssimazione incomprimibile. Questo significa che l'aria in moto rispetto ad un corpo solido dà vita ad un flusso incomprimibile finché la sua velocità è inferiore a circa 103 m/s, che ovviamente è un valore molto elevato. Per quanto detto si può assumere pertanto che il deflusso dell'aria rispetto ad una parete possa essere considerato incomprimibile praticamente in tutte le situazioni, sia di convezione naturale che forzata.

- **Flusso interno:** si ha nel caso di moto di un fluido all'interno di un condotto, come ad esempio quello dell'acqua in un circuito idraulico o di riscaldamento, oppure dell'aria nei canali di distribuzione di un impianto di climatizzazione.
- **Flusso esterno:** è il caso di un fluido che lambisce la superficie esterna di un corpo, ad esempio l'aria che fluisce su una parete.

Prima di affrontare più in dettaglio le tematiche della convezione forzata e di quella naturale, è utile a questo punto presentare alcuni esempi di meccanismi combinati di scambio termico, in particolari configurazioni in cui la conduzione e la convezione coesistono ed hanno luogo contemporaneamente.

### **Parete piana multistrato con scambi liminari convettivi**

Nella figura 12 è rappresentata una parete piana costituita ad esempio da quattro strati di materiale omogeneo ed isotropo che separa l'ambiente interno da quello esterno. L'aria nei due ambienti sia rispettivamente a temperature  $T_{ai}$  e  $T_{ae}$ , con  $T_{ai} > T_{ae}$ .



**Figura 12: Scambi termici combinati in una parete piana multistrato**

Tra l'aria e le superfici interna ed esterna della parete ci sono scambi termici convettivi, detti anche liminari, caratterizzati dai coefficienti  $h_{ci}$  ed  $h_{ce}$ , mentre negli strati interni della parete il calore si trasmette per conduzione. Ciascuno strato è caratterizzato un valore diverso della conducibilità. Essendo l'aria nell'ambiente interno a temperatura maggiore di quella esterna, la potenza termica viene trasmessa globalmente dall'interno verso l'esterno.

Per calcolare tale potenza è dunque necessario considerare contemporaneamente gli scambi convettivi e quelli conduttivi.

Applicando il metodo dell'analogia elettrica, possiamo ricondurre la configurazione termica ad un circuito elettrico di sei resistenze in serie e calcolare la resistenza unitaria totale come somma delle singole resistenze unitarie di tutti gli strati.

Si ha pertanto:

$$R_{u,tot} = \frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{L_4}{\lambda_4} + \frac{1}{h_{ce}}$$

Nota la resistenza termica unitaria totale si possono calcolare successivamente il flusso termico e la potenza termica scambiati nel modo seguente:

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{L_4}{\lambda_4} + \frac{1}{h_{ce}}} \cdot (T_{ai} - T_{ae})$$

$$\dot{Q} = \Phi \cdot A = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot A \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{L_4}{\lambda_4} + \frac{1}{h_{ce}}} \cdot A \cdot (T_{ai} - T_{ae})$$

Essendo il regime stazionario, è ovviamente possibile calcolare l'andamento delle temperature all'interfaccia tra i singoli strati, imponendo che il flusso termico calcolato tra le temperature estreme equivalga a quello calcolato nei singoli strati.

Indicando con  $T_{si}$  e  $T_{se}$  le temperature superficiali rispettivamente interna ed esterna e con  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  le temperature di interfaccia tra gli strati interni della parete, si ha:

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = h_{ci} \cdot (T_{ai} - T_{si}) \Rightarrow T_{si} = T_{ai} - \Phi \cdot \frac{1}{h_{ci}}$$

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1}} \cdot (T_{ai} - T_1) \Rightarrow T_1 = T_{ai} - \Phi \cdot \left( \frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} \right)$$

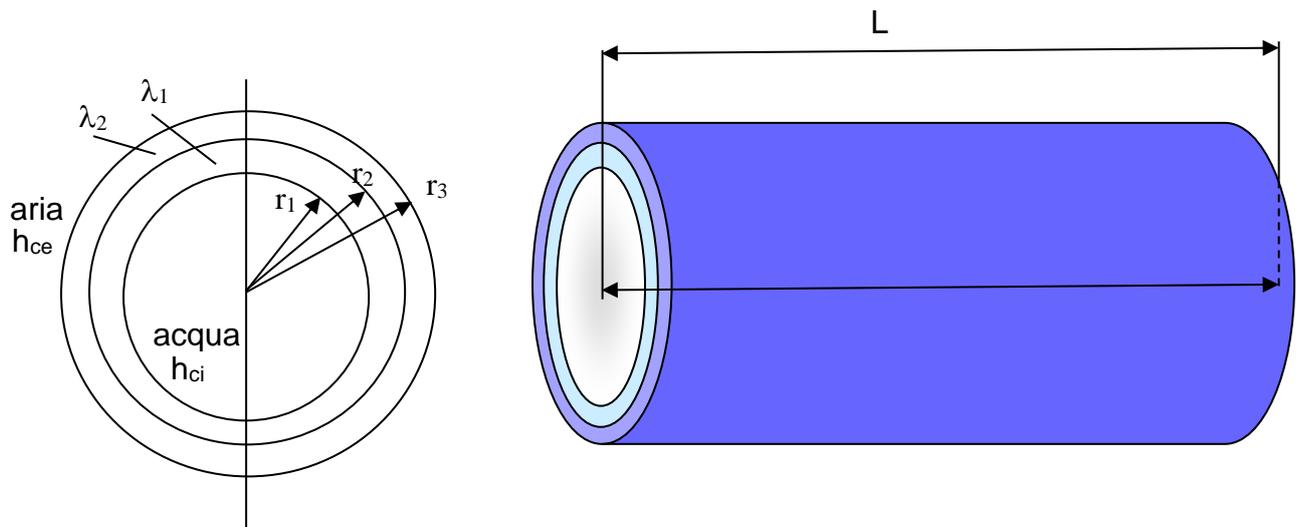
$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}} \cdot (T_{ai} - T_2) \Rightarrow T_2 = T_{ai} - \Phi \cdot \left( \frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right)$$

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3}} \cdot (T_{ai} - T_3) \Rightarrow T_3 = T_{ai} - \Phi \cdot \left( \frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} \right)$$

$$\Phi = \frac{1}{R_{u,tot}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{L_4}{\lambda_4}} \cdot (T_{ai} - T_{se}) \Rightarrow T_{se} = T_{ai} - \Phi \cdot \left( \frac{1}{h_{ci}} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{L_4}{\lambda_4} \right)$$

**Parete cilindrica multistrato con scambi liminari convettivi**  
**Spessore critico dell'isolante**

Consideriamo un sistema costituito da due strati cilindrici di diverso materiale e conducibilità disposti in modo coassiale, sottoposto a scambi termici convettivi all'interno ed all'esterno. E' il caso che si verifica quando un tubo trasporta un fluido (per esempio acqua riscaldata in un impianto di riscaldamento) e viene opportunamente isolato sul lato esterno per evitare eccessive dispersioni termiche. Tra l'acqua che scorre all'interno del tubo e la superficie interna dello strato interno ci sono scambi termici convettivi caratterizzati da un coefficiente  $h_{ci}$  mentre all'esterno ci sono scambi termici convettivi con l'aria caratterizzati da un coefficiente  $h_{ce}$ .



**Figura 13: Scambi termici combinati in un cilindro cavo (es: tubo in cui scorre acqua calda)**

Supponiamo che il fluido interno si trovi ad una temperatura  $T_a$  maggiore di quella del fluido esterno  $T_e$  determinando in tal modo un flusso termico uscente dall'interno verso l'esterno. Lo strato di isolante esterno, caratterizzato da un basso valore della conducibilità, serve appunto a limitare tale dispersione aumentando il valore della resistenza termica offerta dall'intero sistema.

Adottando il metodo dell'analogia elettrica, si può anche in questo caso ricondurre il sistema ad una successione di resistenze in serie: due convettive (quella interna e quella esterna) e due conduttive (quelle dello spessore del tubo e dell'isolante).

Si potrebbe pensare che, come avviene nel caso di geometria piana, un aumento dello spessore dell'isolante comporti sempre un aumento della resistenza termica. In geometria cilindrica, però, si verifica la circostanza particolare per la quale, all'aumentare dello spessore dell'isolante, aumenta la resistenza termica dello strato ma contemporaneamente aumenta la superficie esterna del sistema, che produce un incremento degli scambi convettivi. I due fattori sono contrastanti: il primo limita le dispersioni, il secondo le accentua, di conseguenza sarà necessario valutare attentamente l'influenza di entrambi sulla resistenza termica globale per determinare il valore ottimale dello spessore dell'isolante.

Calcoliamo nel modo seguente la resistenza termica totale:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{1}{2\pi \cdot r_1 \cdot L \cdot h_{ci}} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_2} + \frac{1}{2\pi \cdot r_3 \cdot L \cdot h_{ce}}$$

Studiamo l'andamento della funzione  $R_{tot}$  al variare dello spessore dello strato di isolante, cioè all'aumentare di  $r_3$ .

I primi due termini della somma non dipendono dal raggio esterno  $r_3$ , per cui sono costanti rispetto ad esso.

La derivata prima della resistenza totale si calcola pertanto nel modo seguente:

$$\frac{dR_{tot}}{dr_3} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3^2} \frac{1}{2\pi \cdot L \cdot h_{ce}}$$

Ponendola uguale a zero si ottiene:

$$\frac{dR_{tot}}{dr_3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3^2} \frac{1}{2\pi \cdot L \cdot h_{ce}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_3 \cdot \lambda_2} - \frac{1}{r_3^2 \cdot h_{ce}} = 0 \Rightarrow r_3 = \frac{\lambda_2}{h_{ce}}$$

Poiché inoltre la derivata prima della funzione  $R_{tot}$  risulta negativa per  $r_3 < \frac{\lambda_2}{h_{ce}}$  e positiva per

$r_3 > \frac{\lambda_2}{h_{ce}}$ , la resistenza totale presenta un punto di minimo per  $r_3 = \frac{\lambda_2}{h_{ce}}$

Questo significa che all'aumentare del raggio esterno dello strato di isolante, la resistenza termica globale aumenta solo se esso è superiore ad un valore minimo (detto critico) dato dal rapporto tra la conducibilità termica dell'isolante ed il coefficiente di scambio convettivo esterno. Al di sotto di tale valore, un aumento dello spessore è addirittura controproducente, poiché comporta una diminuzione e non un aumento della resistenza totale, dunque un aumento delle dispersioni.

Il valore assunto dal raggio critico nel caso di isolamento termico di una tubazione per il trasporto di un fluido termovettore (es. acqua in un impianto di riscaldamento) è di solito molto basso, per cui il problema non si pone.

Nel caso di cavi elettrici, invece, essendo questi caratterizzati da dimensioni molto piccole, la guaina isolante può dar luogo a valori del raggio esterno inferiori al raggio critico. In questo caso l'aumento di dispersione termica all'aumentare dello spessore dell'isolante è vantaggioso, poiché consente di smaltire più efficacemente il calore prodotto per effetto Joule.

## Convezione forzata

Come già descritto in uno dei paragrafi precedenti, la convezione forzata è il meccanismo di scambio termico che si verifica ogni qualvolta un corpo ad una certa temperatura superficiale scambia calore con un fluido in movimento, quando il moto del fluido è causato da un agente meccanico esterno (ad esempio una pompa di circolazione o un ventilatore).

Il moto di un fluido può essere *laminare* o *turbolento*. Entrambe le condizioni costituiscono dei modelli fluidodinamici ideali a cui, nei vari casi, sono riconducibili, con un diverso grado di approssimazione, le condizioni reali di moto.

Nel moto laminare le particelle seguono traiettorie ben definite parallele le une alle altre (linee di corrente) senza mai mescolarsi tra di loro (cfr. Figura 14-a), similmente a ciò che avviene in una parata militare in cui ogni soldato segue una precisa traiettoria mantenendo distanze fisse rispetto agli altri, mentre nel moto turbolento avviene un mescolamento disordinato delle particelle, tanto più efficace quanto più elevato è il grado di turbolenza, un po' come accade quando degli scolari escono di corsa dalla scuola al suono della campanella. Nel caso di moto turbolento, solo mediamente e statisticamente si può affermare che la massa fluida in movimento è caratterizzata da una direzione e da un verso, quindi da una velocità, ma se si analizza il moto della singola particella, la sua traiettoria è caratterizzata da repentine variazioni di direzione e verso (cfr. Figura 14-b).

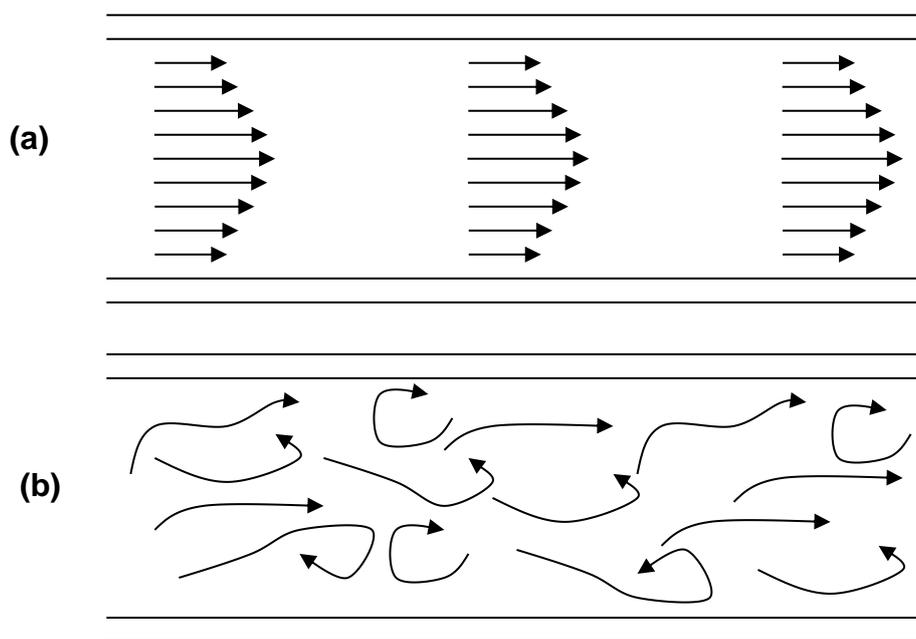


Figura 14: Flusso interno di un fluido in regime laminare (a) e turbolento (b)

Fatte queste premesse, proviamo a descrivere il fenomeno della convezione forzata facendo riferimento al caso del flusso esterno di un fluido a temperatura  $T_\infty$  su una piastra calda a temperatura  $T_s$  come quello rappresentato in modo schematico nella Figura 15. Tale configurazione descrive con buona approssimazione tutte le situazioni in cui la superficie di contatto è piana o caratterizzata da curvatura poco accentuata, assimilabile ad una superficie piana (es. le pale di una turbina idraulica)

Se descriviamo il profilo di velocità del fluido a partire dalla sezione di imbocco, possiamo considerare nulla la velocità del fluido rispetto alla piastra nelle zone di contatto (condizione

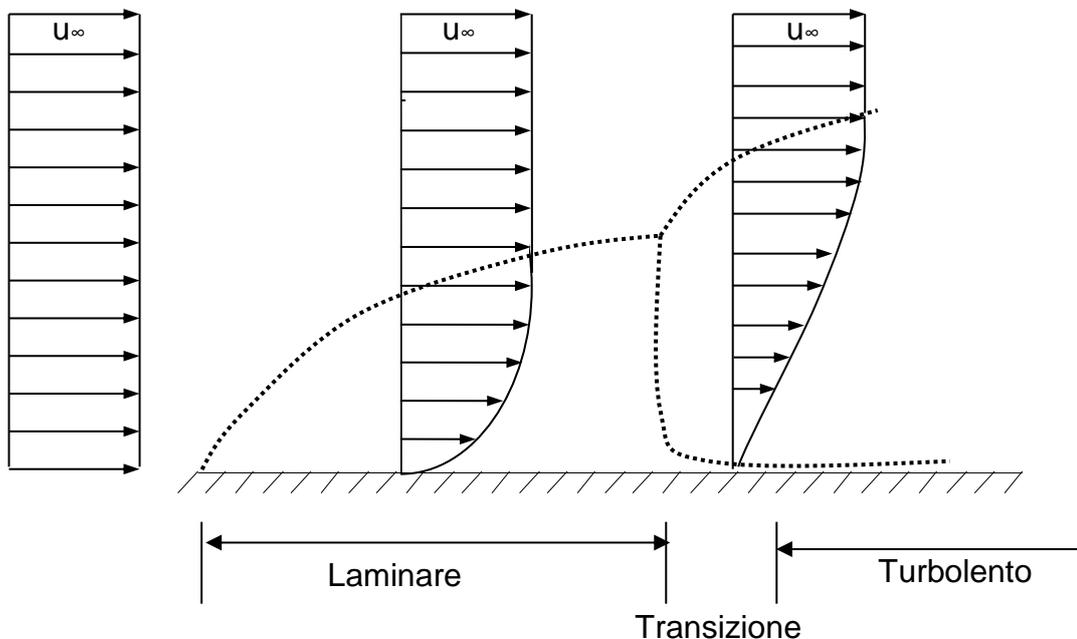
di aderenza), mentre essa aumenta gradualmente allontanandosi da essa, fino a raggiungere il valore indisturbato  $u_\infty$ .

Nella zona di contatto tra fluido e parete, dove la velocità relativa è nulla, avviene uno scambio termico di tipo conduttivo. Questo produce un aumento dell'energia cinetica delle particelle di fluido, le quali, muovendosi verso regioni a più bassa temperatura, cedono energia alle particelle che occupano tali zone. Il fenomeno è dunque contemporaneamente dovuto ad un trasferimento di energia di tipo conduttivo e ad un trasporto di massa. E' importante perciò definire le condizioni fluidodinamiche del moto per risolvere il problema termico.

Se il fluido si muove di moto perfettamente laminare rispetto alla parete e tra i due sistemi c'è una differenza di temperatura, avviene tra di essi uno scambio termico di tipo esclusivamente conduttivo, essendo il flusso interessato solo da moti delle particelle a livello sub-microscopico. Al contrario, se il regime di moto è turbolento, le particelle si mescolano attraversando le traiettorie ed il trasferimento di energia avviene attraverso urti. Il meccanismo di scambio termico è perciò tanto più efficace quanto più elevato è il grado di turbolenza ed agli effetti della conduzione si aggiungono quelli più propriamente convettivi.

Il rallentamento delle particelle man mano che si avvicinano alla parete è dovuto all'azione delle forze viscosi (tangenziali) che hanno luogo tra i vari strati di fluido in movimento gli uni rispetto agli altri. L'andamento della velocità dipende dalla viscosità del fluido. Lo strato aderente alla parete è fermo rispetto ad essa e rallenta quello adiacente che a sua volta fa lo stesso con quello successivo e così fino a che l'azione di rallentamento si esaurisce ed il fluido risulta caratterizzato da un valore indisturbato della velocità ( $u_\infty$ ).

La tensione o sforzo viscoso si manifesta a livello microscopico ed è l'unica azione che ha luogo nel caso di moto laminare. Al contrario, nel moto turbolento, agli sforzi viscosi si sovrappongono interazioni tra le particelle a livello macroscopico che danno luogo a sforzi detti appunto turbolenti. Lo sforzo viscoso che si esplica tra il fluido e la superficie può essere anche visto come un'azione di trascinamento del fluido nei confronti della superficie nella direzione del moto (resistenza superficiale).



**Figura 15: Flusso esterno di un fluido in convezione forzata su una parete piana - strato limite di velocità**

Le forze di attrito o viscoso che si manifestano tra i vari strati di fluido possono essere calcolate con la seguente relazione di Newton:

$$\tau_s = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

che, sulla superficie della parete assume la forma:  $\tau_s = \mu \cdot \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$

dove:

$\tau_s$ : tensione viscosa [N/m<sup>2</sup>]

$\mu$ : viscosità dinamica [kg/m s = N s/m<sup>2</sup> = Pa s]

Per la misura della viscosità dinamica viene anche utilizzato il *poise* o un suo sottomultiplo:  
1 poise = 0,1 Pa s

I fluidi che soddisfano la relazione precedente sono detti newtoniani; acqua ed aria sono classificabili come fluidi newtoniani con buona approssimazione.

Accanto alla viscosità dinamica si può definire la viscosità cinematica di un fluido nel modo seguente:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosità cinematica si misura in m<sup>2</sup>/s, oppure in stoke (1 stoke=1 cm<sup>2</sup>/s=0,0001 m<sup>2</sup>/s). La viscosità cinematica è una grandezza molto utilizzata nei problemi termici, ha le stesse dimensioni della diffusività termica ed è denominata, per analogia con questa, diffusività viscosa o momento viscoso.

La viscosità è una proprietà dei fluidi strettamente collegata alla temperatura. In particolare, nei liquidi, diminuisce all'aumentare di questa, mentre nei gas aumenta.

La determinazione dello sforzo viscoso con la relazione scritta risulta oltremodo complessa perché presuppone la conoscenza del profilo di velocità. Per flussi esterni si può utilizzare una relazione approssimata, come la seguente:

$$\tau_s = c_f \cdot \frac{\rho \cdot u_\infty^2}{2}$$

in cui  $c_f$  è il coefficiente d'attrito,  $\rho$  la densità del fluido ed  $u_\infty$  la velocità indisturbata del fluido stesso.

La forza d'attrito o di trascinamento è ricavabile dall'espressione precedente moltiplicando il valore dello sforzo per la superficie su cui viene esercitato

$$F_f = c_f \cdot A_s \cdot \frac{\rho \cdot u_\infty^2}{2}$$

## **Strato limite fluidodinamico o di velocità**

La regione di fluido entro la quale si hanno sostanziali variazioni di velocità ed in cui sono presenti significative forze viscosi, si chiama *strato limite fluidodinamico* o *strato limite di velocità*, ed il suo spessore è definito come la distanza dalla parete in corrispondenza della quale la velocità del fluido raggiunge il 99% di quella indisturbata.

Nella figura 15 è disegnata a tratti la linea immaginaria in corrispondenza della quale la velocità del fluido assume tale valore; essa delimita due zone occupate dal fluido: lo strato limite, cioè un sottile strato a contatto con la parete in cui hanno luogo i fenomeni viscosi, caratterizzato da elevati gradienti di velocità, ed una regione esterna ad esso in cui gli effetti della viscosità sono trascurabili e la velocità assume il valore indisturbato.

Ipotizzando che lo schema della figura 15 rappresenti un flusso d'aria su una piastra piana parallela alla corrente, si nota come lo spessore dello strato limite vada gradualmente aumentando a partire dalla sezione di attacco, dove è praticamente nullo, poiché solo le particelle a contatto con la parete sono rallentate mentre il resto del fluido si muove indisturbato, ed aumenta man mano che il moto del fluido procede poiché quantità di fluido sempre crescenti sono interessate da fenomeni viscosi e sono soggette pertanto al fenomeno del rallentamento. All'interno dello strato limite il moto rimane laminare fino ad una certa distanza dal bordo di attacco e diventa poi turbolento passando attraverso una zona di transizione.

Il gruppo adimensionale che permette di determinare le condizioni del moto in convezione forzata si chiama *numero di Reynolds* ed è espresso dal seguente rapporto:

$$Re = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot l}{\mu} = \frac{u_{\infty} \cdot l}{\nu}$$

in cui:

$\rho$ : densità del fluido (kg/m<sup>3</sup>);

$u_{\infty}$ : velocità del fluido indisturbato (m/s);

$l$ : grandezza geometrica lineare caratteristica della geometria del sistema (m);

$\mu$ : viscosità dinamica del fluido (kg/m s);

$\nu$ : viscosità cinematica del fluido (m<sup>2</sup>/s).

La grandezza  $l$  assume di volta in volta il valore della dimensione geometrica che caratterizza la configurazione: ad esempio, nel caso di moto di un fluido in un condotto a sezione circolare, essa è data dal diametro dello stesso, mentre nel caso di moto di un fluido su una parete, quale quello di figura 15, si può far coincidere tale grandezza con la distanza dalla sezione d'imbocco crescente lungo la direzione del moto. In corrispondenza di una distanza  $x$  dalla sezione di imbocco ( $x=0$ ) si definirà un numero di Reynolds locale pari a:

$$Re_x = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x}{\mu} = \frac{u_{\infty} \cdot x}{\nu}$$

La distanza dal bordo di attacco alla quale il moto nello strato limite è diventato completamente turbolento è detta distanza critica ed il valore di  $Re$  è detto anch'esso critico. In un problema di convezione forzata su lastra piana il valore del numero di *Reynolds critico*

vale circa  $5 \times 10^5$ , anche se tale valore ha carattere orientativo e può cambiare in funzione del grado di turbolenza della corrente libera.

Il numero di Reynolds esprime il rapporto tra le forze di inerzia, che risultano proporzionali alla densità e alla velocità del fluido, cioè alla sua quantità di moto, e le forze viscosive. Finché lo spessore dello strato caratterizzato da intense forze viscosive è piccolo, queste prevalgono sulle forze d'inerzia, mantenendo le caratteristiche di laminarità del moto nello strato limite. All'aumentare del suo spessore, però, le forze viscosive diventano sempre meno efficaci ed il regime di turbolenza si impone rendendo instabile lo strato limite. Si genera così al suo interno un regime turbolento in cui solo un sottile strato a ridosso della parete è caratterizzato da un moto quasi laminare (sottostrato laminare). Superata la distanza critica il regime di turbolenza è completamente sviluppato.

Le caratteristiche di turbolenza dipendono, oltre che dalle proprietà fisiche del fluido e dalla sua velocità, anche dalla finitura superficiale della parete la cui rugosità può essere determinante per accelerare la transizione da moto laminare a moto turbolento nello strato limite. Poiché le condizioni di moto turbolento sono ovviamente più vantaggiose dal punto di vista dello scambio termico, talvolta vengono create "ad hoc" delle asperità sulle superfici di scambio per ottenere un maggior grado di turbolenza, come avviene in alcuni scambiatori di calore sulla cui superficie esterna viene realizzata una apposita alettatura con lamine metalliche di elevata conducibilità che incrementano lo scambio termico convettivo con il fluido. Il moto turbolento è comunque un fenomeno complesso per lo studio del quale si ricorre sovente a relazioni di carattere sperimentale.

### **Strato limite termico**

Consideriamo ancora il fluido in moto convettivo forzato che lambisce una lastra piana. Analogamente a quanto avviene per le velocità, ipotizzando che il fluido abbia una temperatura della corrente libera (indisturbata) pari a  $T_\infty$  e la parete sia a temperatura  $T_s$ , diverse tra di loro, lo strato di fluido a diretto contatto con la parete si porterà in equilibrio termico con essa, assumendo la sua stessa temperatura e scambierà calore con gli strati adiacenti dando vita ad un processo a catena. Questo origina un profilo di temperatura del fluido variabile da  $T_s$ , a ridosso della parete, fino al valore  $T_\infty$  a sufficiente distanza da questa. Analogamente a ciò che avviene per la velocità, si potrà pertanto definire una regione a contatto con la superficie caratterizzata da significative variazioni di temperatura in direzione perpendicolare ad essa, denominata strato limite termico. Si assume convenzionalmente che lo spessore dello strato limite termico sia quello in corrispondenza del quale si verifica la seguente uguaglianza:

$$T - T_s = 0,99 \cdot (T_\infty - T_s)$$

Man mano che si procede nella direzione del moto, lo spessore dello strato limite aumenta poiché il fenomeno di scambio termico interessa strati di fluido sempre più distanti dalla parete.

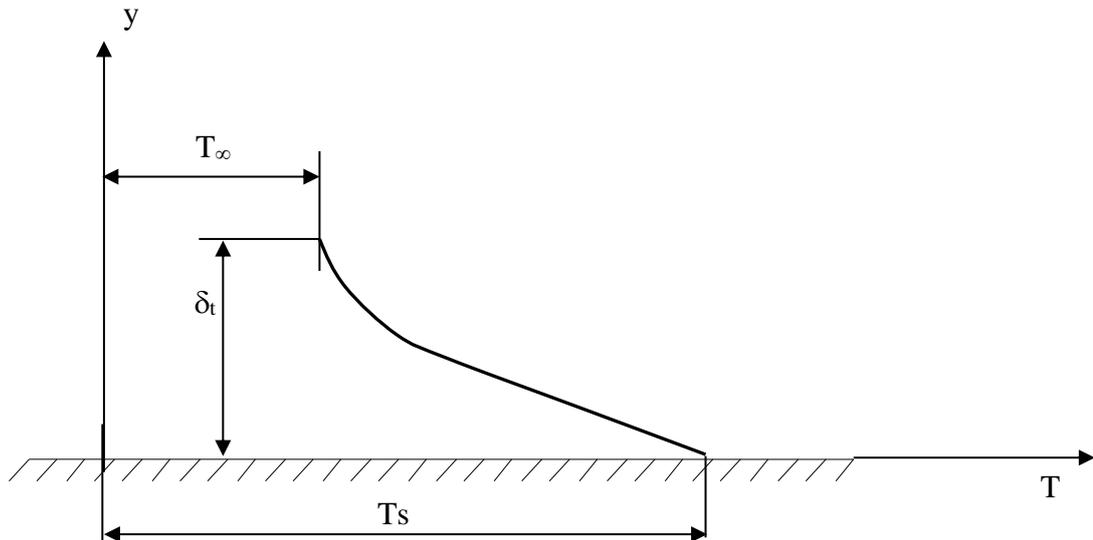
Entrambi gli strati limite, fluidodinamico e termico, si sviluppano contemporaneamente nella direzione del moto e quello fluidodinamico ha forte influenza sul fenomeno termico convettivo.

La relazione che c'è tra le grandezze fluidodinamiche e quelle relative al fenomeno termico è espressa da un altro gruppo adimensionale detto *Numero di Prandtl*, dal nome dello studioso che introdusse il concetto di strato limite (1904). Il numero di Prandtl mette cioè in relazione il fenomeno termico con quello dinamico.

Si definisce nel modo seguente:

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

che di fatto rappresenta il rapporto tra la diffusività dinamica (della quantità di moto) e quella termica del fluido.



**Figura 16: Convezione forzata tra un fluido ed una parete – profilo di temperatura e strato limite termico**

Se  $Pr$  assume valori bassi, come ad esempio nei metalli liquidi, la diffusività termica è maggiore di quella della quantità di moto ( $a > \nu$ ), e questo corrisponde a piccoli gradienti di temperatura ed elevati gradienti di velocità, per cui di solito questi fluidi presentano uno strato limite termico molto più spesso di quello fluidodinamico. Al contrario, se  $Pr$  assume valori elevati, come negli oli, la diffusione del calore è più lenta di quella della quantità di moto ( $a < \nu$ ), e questo corrisponde ad elevati gradienti di temperatura e a piccoli gradienti di velocità. Ne risulta pertanto uno strato limite termico molto più sottile di quello fluidodinamico. Per l'acqua il valore di  $Pr$  è circa pari a 10.

Per quanto riguarda i gas, invece, quantità di moto e calore si dissipano quasi con la stessa intensità.

Quando la velocità del fluido è bassa, il trasporto di energia è prevalentemente conduttivo ed è poco influenzato dal mescolamento tra le particelle di fluido, che invece risulta preponderante nel caso di turbolenza del moto, per cui, dove si hanno elevate velocità, la potenza termica trasmessa è elevata anche in corrispondenza di un gradiente di temperatura ridotto, mentre in regioni caratterizzate da bassi valori della velocità il fenomeno termico dipende fortemente dal gradiente di temperatura e la conduzione termica risulta importante.

In una situazione di scambio termico convettivo forzato tra una parete ed un fluido si può ipotizzare che si instauri un profilo di temperatura come quello rappresentato nella figura 16, in cui il fluido che aderisce alla parete assume la sua stessa temperatura ( $T_s$ ), mentre allontanandosi da essa la temperatura tende al valore che caratterizza il fluido indisturbato ( $T_\infty$ ).

Nello strato a contatto con la parete il calore passa solo per conduzione per l'aderenza del fluido alla parete stessa, per cui è possibile prevedere al suo interno un elevato gradiente di

temperatura, mentre, allontanandosi dalla parete, il gradiente diminuisce poiché il trasporto di energia è dovuto in modo prevalente al movimento del fluido stesso. Pertanto, all'interfaccia tra fluido e parete il calore trasmesso può essere calcolato con la relazione fondamentale della conduzione termica:

$$\dot{Q}_{parete-fluido} = -\lambda \cdot A \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Tale potenza equivale a quella scambiata tra la parete ed il fluido per cui sussiste l'uguaglianza:

$$-\lambda \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = h_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty)$$

da cui, introducendo una lunghezza L caratteristica del sistema, si ottiene:

$$-\lambda \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = h_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) \Rightarrow \frac{h_c}{\lambda} = - \frac{\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{(T_s - T_\infty)} \Rightarrow \frac{h_c \cdot L}{\lambda} = - \frac{\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{(T_s - T_\infty)}{L}} \Rightarrow$$

$$\frac{h_c \cdot L}{\lambda} = \frac{\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{(T_s - T_\infty)}{L}}$$

Al gruppo adimensionale  $\frac{h_c \cdot L}{\lambda}$  si dà il nome di *numero di Nusselt (Nu)*:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{\lambda} = \frac{\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{(T_s - T_\infty)}{L}}$$

Il valore assunto dal numero di Nusselt è estremamente significativo nello studio del fenomeno convettivo in quanto in esso compaiono tutti i parametri che determinano il fenomeno, cioè il coefficiente di scambio termico convettivo, la conducibilità termica del fluido e la lunghezza caratteristica del sistema.

Dalla espressione scritta si nota che esso è dato dal rapporto tra il gradiente termico in corrispondenza della parete ed un gradiente termico di riferimento, calcolato con i valori delle grandezze rappresentative del fenomeno, cioè la differenza di temperatura tra fluido indisturbato e parete e la lunghezza caratteristica.

Inoltre può anche essere visto come il rapporto tra la conduttanza unitaria convettiva e quella conduttiva:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{\lambda} = \frac{h_c}{\frac{\lambda}{L}}$$

Infine può essere interpretato come il gradiente termico riferito alla temperatura adimensionalizzata:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{\lambda} = \frac{d \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}}{d \frac{y}{L}}$$

La determinazione del numero di Nusselt equivale alla soluzione del problema convettivo in quanto consente il calcolo del coefficiente di scambio termico:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{\lambda} \Rightarrow h_c = Nu \cdot \frac{\lambda}{L}$$

Un'ulteriore interpretazione del numero di Nusselt consiste nel considerarlo come il rapporto tra la potenza termica convettiva effettivamente scambiata tra parete e fluido e quella che verrebbe scambiata qualora il fluido fosse in quiete ed il calore fosse trasmesso solo per conduzione. Infatti, in questa ipotesi, si avrebbe:

$$\dot{Q}_{parete-fluido} = \lambda \cdot A \cdot \frac{T_s - T_\infty}{L}$$

da cui:

$$\frac{\dot{Q}_{conv}}{\dot{Q}_{cond}} = \frac{h_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty)}{\lambda \cdot A \cdot \frac{T_s - T_\infty}{L}} = \frac{h_c \cdot L}{\lambda} = Nu$$

Questo significa che lo scambio termico convettivo è tanto più efficace quanto più elevato è il numero di Nusselt. Di solito, nel moto turbolento di fluidi all'interno di condotti in convezione forzata, esso varia tra cento e mille; inoltre, se il suo valore è di poco maggiore di uno, esso è indicativo di uno scambio termico poco efficace, legato probabilmente ad una condizione di moto caratterizzata da bassi valori della velocità (come ad esempio nel moto laminare di un fluido in un condotto molto lungo), con uno scambio termico di poco più intenso del solo scambio conduttivo all'interno del fluido. Se il numero di Nusselt risulta pari ad uno possiamo dire che la trasmissione del calore attraverso lo strato di fluido risulta essere puramente conduttiva.

La soluzione teorica del problema convettivo prevede la soluzione del problema fluidodinamico (equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto) all'interno

dello strato limite fluidodinamico, e di quello termico (equazione della conservazione dell'energia) nello strato limite termico. Come già accennato queste sono tra di loro strettamente connesse e permettono di determinare in definitiva il campo di velocità e l'andamento delle temperature  $T(x,y)$ , da cui si può determinare il numero di Nusselt.

Questo tipo di soluzione è di solito molto complessa e richiede metodi numerici. In alternativa si può utilizzare un approccio empirico correlando dati sperimentali di temperatura e di flusso termico ottenuti in condizioni controllate mediante i tre gruppi adimensionali che caratterizzano il fenomeno della convezione forzata: Nu, Re e Pr. Infatti il problema termico di convezione forzata si risolve determinando il valore del numero di Nusselt in funzione di quelli assunti nelle varie configurazioni dai numeri di Reynolds e Prandtl:

$$Nu = f(Re, Pr)$$

In particolare, si possono correlare i dati sperimentali ottenuti nelle varie configurazioni con relazioni del tipo:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

in cui gli esponenti m ed n e la costante C assumono di volta in volta valori caratteristici della configurazione di moto e di scambio termico.

## Convezione naturale

La convezione naturale ha luogo ogni qualvolta il moto del fluido non è provocato da cause esterne, ma innescato da cause naturali come le forze di galleggiamento. E' un fenomeno molto presente nel caso di scambi termici all'interno degli edifici, ad esempio tra le pareti di un ambiente e l'aria che le lambisce o tra la superficie di un corpo scaldante e l'aria stessa.

Facendo riferimento a quest'ultimo esempio, possiamo provare a descrivere il fenomeno della convezione naturale: gli strati d'aria a diretto contatto con il corpo più caldo si riscaldano per conduzione e diminuiscono di densità, essendo nei gas la densità inversamente proporzionale alla temperatura, mantenendo costante la pressione. Questa diminuzione di densità provoca un movimento ascensionale dell'aria che lascia il posto ad aria più fredda e così via in un processo che dà vita ad un moto convettivo generato esclusivamente da cause naturali.

Le forze di galleggiamento, che provocano il movimento convettivo relativo tra fluidi a diversa densità, sono le stesse che si manifestano nel caso di un corpo solido immerso in un fluido, dando vita ad una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato (Legge di Archimede).

E' proprio la forza di galleggiamento che consente, ad esempio, alle navi di rimanere a galla, essendo queste progettate in modo tale che l'intero peso della nave equivalga al peso della quantità d'acqua contenuta nel volume corrispondente alla parte immersa della nave stessa. Indicando con  $V$  il volume d'acqua spostato dalla porzione dello scafo immersa in acqua, si ha:

$$F_{gall} = \rho_{fluido} \cdot V \cdot g$$

La spinta netta verso l'alto equivale pertanto alla differenza:

$$F = (\rho_{fluido} - \rho_{corpo}) \cdot V \cdot g$$

Poiché la densità dell'acqua dolce risulta inferiore a quella dell'acqua di mare, lo stesso scafo, che in acqua di mare risulta immerso per un certo volume, se naviga in acqua dolce si immerge di più per rimanere a galla, in quanto, in questo caso, la forza di galleggiamento è meno efficace ed il suo peso equivale al peso di un volume d'acqua maggiore.

Un altro fenomeno dovuto alle forze di galleggiamento è l'effetto camino, che consente, ad esempio, ai fumi, prodotti dalla combustione che ha luogo nella caldaia di un impianto di riscaldamento, di essere evacuati verso l'esterno in modo naturale. In questo caso la spinta verso l'alto è prodotta dalla differenza di densità tra i fumi caldi e l'aria esterna più fredda.

Nei fluidi la densità dipende in modo significativo dalla temperatura. Definiamo a questo proposito il coefficiente di dilatazione cubica  $\beta$ :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad [K^{-1}]$$

Esso esprime la variazione relativa di densità del fluido in funzione della temperatura mantenendo costante la pressione.

Il coefficiente di dilatazione cubica può essere scritto, con buona approssimazione, anche in una forma dipendente dalle variazioni finite delle grandezze, se si fa riferimento ai valori di densità e temperatura del fluido indisturbato, cioè considerato ad una distanza tale dal corpo da non esserne influenzato. Si ottiene la seguente espressione:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}$$

da cui, sempre considerando la pressione costante, si ottiene:

$$\rho_\infty - \rho = \rho \cdot \beta (T - T_\infty)$$

Se il fluido considerato è un gas, ipotizzando di poter adottare per esso il modello di gas ideale, per il quale, come noto, vale la relazione  $p = \rho R T$ , si ha:

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Ad elevati valori di  $\beta$  corrispondono elevate variazioni di densità con la temperatura. Poiché, la forza di galleggiamento è tanto più elevata quanto maggiore è la differenza di densità, in regime di convezione naturale, la differenza di temperatura tra fluido e parete, che è la causa fondamentale di tale differenza, è anche il parametro che maggiormente influenza il valore numerico del coefficiente di scambio, poiché condiziona in modo significativo il valore assunto dalla forza di galleggiamento. In ultima analisi, possiamo affermare che un incremento della differenza di temperatura tra il corpo ed il fluido indisturbato, originando un aumento dell'intensità della forza di galleggiamento, produce degli scambi termici convettivi più efficaci, ed un elevato coefficiente di dilatazione contribuisce anch'esso ad un incremento degli scambi termici.

L'altro parametro che condiziona l'entità dello scambio termico convettivo tra un fluido ed una superficie è la portata in massa del fluido stesso, al crescere della quale cresce la potenza termica scambiata. Mentre nella convezione forzata la portata di fluido può essere regolata dall'organo meccanico impiegato per innescare il moto, nella convezione naturale la portata in massa è determinata dal bilancio tra le forze di galleggiamento, che danno vita al moto, e quelle d'attrito che inevitabilmente si sviluppano, sia tra il corpo ed il fluido che tra i vari strati di fluido che strisciano l'uno sull'altro. E' ovvio che elevate forze d'attrito possono ridurre notevolmente lo scambio termico convettivo. Questo è il motivo per cui, in condizioni di convezione naturale, non è sempre consigliabile, contrariamente a quanto avviene nella convezione forzata, l'adozione di alette ravvicinate per il raffreddamento di dissipatori di calore.

Per risolvere il problema della convezione naturale è necessario scrivere le equazioni del moto nello strato limite, in particolare quelle di conservazione della massa e dell'energia, che sono le stesse della convezione forzata, e quella del momento che deve essere modificata per tener conto delle forze di galleggiamento. Anche in questo caso la soluzione analitica del problema non è agevole e si utilizzano metodi numerici con programmi di calcolo specializzati. Analogamente a quanto si fa per la convezione forzata, il problema può essere risolto con un metodo sperimentale, che permette di ottenere dati che possono essere messi in relazione con gruppi adimensionali.

Nel caso di convezione naturale il numero di Nusselt ed il numero di Prandtl, che consentono, rispettivamente, di determinare il coefficiente di scambio termico e di mettere

---


$$p = \rho \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R \cdot T};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p = -\frac{p}{R} \cdot \frac{1}{T^2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p = -\frac{1}{\rho} \cdot \left( -\frac{p}{R} \cdot \frac{1}{T^2} \right) = -\frac{R \cdot T}{p} \cdot \left( -\frac{p}{R} \cdot \frac{1}{T^2} \right) = \frac{T}{T^2} = \frac{1}{T}$$

in relazione i dati fluidodinamici con quelli termici, sono gli stessi utilizzati nella convezione forzata, mentre il numero di Reynolds, che nella convezione forzata esprime il rapporto tra le forze di inerzia e quelle viscosi, in convezione naturale è sostituito da un altro gruppo adimensionale, detto Numero di Grashof, che tiene conto delle forze di galleggiamento, responsabili del moto del fluido.

Il numero di Grashof si definisce nella maniera seguente:

$$Gr = \frac{\text{forze di galleggiamento}}{\text{forze viscosi}} = \frac{g \cdot \Delta\rho \cdot V}{\rho \cdot \nu^2} = \frac{g \cdot V \cdot \rho \cdot \beta \cdot \Delta T}{\rho \cdot \nu^2}$$

con ovvio significato dei simboli.

Introducendo una grandezza lineare caratteristica del sistema L si può esprimere il volume nel modo seguente:

$$V = L^3$$

ottenendo:

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_s - T_\infty) \cdot L^3}{\nu^2}$$

Come nella convezione forzata il numero di Reynolds permette di stabilire la natura del moto, laminare o turbolento, in convezione naturale tale criterio è fornito proprio dal numero di Grashof, all'aumentare del quale si passa dal regime laminare a quello turbolento. Nel moto convettivo naturale di aria su una lastra piana verticale, il numero critico di Grashof è pari a circa  $10^9$ .

Nella convezione naturale, per alcune configurazioni geometriche semplici, si possono ottenere soluzioni analitiche delle equazioni del moto e dell'energia, ma tali soluzioni non sono generalizzabili. Dunque anche in questo caso si fa ricorso sovente a relazioni empiriche tra i gruppi adimensionali, che si presentano nella forma:

$$Nu = C(Gr \cdot Pr)^n$$

in cui il numero di Nusselt è determinato in funzione di Pr e Gr una volta note la costante C e l'esponente n, desumibili da ripetute prove sperimentali. Ovviamente, tali valori si differenzieranno significativamente in funzione delle diverse configurazioni in cui il problema convettivo di volta in volta si presenta.

Il prodotto tra Gr e Pr fornisce un altro gruppo adimensionale, detto numero di Raleigh Ra:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_s - T_\infty) \cdot L^3}{\nu^2} \cdot Pr$$

In definitiva si ha:

$$Nu = C(Ra)^n$$

Generalmente n vale un quarto per regime laminare ed un terzo per regime turbolento, mentre C è normalmente minore di uno.

### Valori caratteristici dei coefficienti di scambio termico

Di seguito viene riportata una tabella di riferimento con gli intervalli in cui ricadono i valori caratteristici dei coefficienti di scambio termico in alcuni casi di convezione, naturale o forzata. Per quanto detto, è evidente che, in caso di convezione forzata, lo scambio termico è fortemente influenzato dalle condizioni di moto, in particolare dalla velocità del fluido, ed ogni tentativo di aumentare tale valore produce un incremento del coefficiente di scambio, mentre in convezione naturale o libera è la differenza di temperatura tra parete e fluido che influenza maggiormente il coefficiente di scambio termico essendo responsabile del moto.

Configurazione di scambio termico	$\bar{h}_c \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$
Aria in convezione naturale	6÷30
Aria in convezione forzata	30÷300
Acqua in convezione forzata	300÷12000
Acqua in ebollizione	3000÷60000
Vapore acqueo in condensazione	6000÷120000
Olio in convezione forzata	60÷700

Una situazione particolarmente interessante si verifica in regime di convezione naturale quando la parete con cui l'aria scambia calore è orizzontale, ad esempio un pavimento o un solaio. Si possono verificare in questo caso due situazioni: la prima prevede un *flusso termico ascendente* e la seconda *discendente*. Si ha flusso ascendente quando si considera il solaio di separazione tra un ambiente inferiore più caldo ed uno superiore più freddo. In questo caso le temperature vanno decrescendo procedendo dal basso verso l'alto, per cui l'aria dell'ambiente inferiore viene a contatto con una parete più fredda che ne fa aumentare la densità, provocandone così la caduta ed incrementando i moti convettivi naturali. Allo stesso modo l'aria dell'ambiente superiore, venendo a contatto con un pavimento più caldo, diminuisce la sua densità e si anima di moto ascensionale a tutto vantaggio dello scambio termico convettivo. La configurazione di flusso termico ascendente produce, dunque, nel suo complesso, efficaci scambi termici tra l'aria e la parete sia nell'ambiente superiore che in quello inferiore. La situazione opposta si verifica quando il regime termico è tale da comportare una temperatura dell'ambiente superiore più elevata di quella dell'ambiente inferiore. In questo caso in entrambi gli ambienti, l'aria viene a contatto con pareti che tendono ad ostacolare i moti convettivi naturali. Nell'ambiente superiore, infatti, la parete è più fredda ed in quello inferiore più calda dell'aria. Entrambe queste situazioni tendono a favorire la stratificazione dell'aria producendo una attenuazione degli scambi termici convettivi. Le seguenti relazioni, valide per convezione naturale tra aria e parete orizzontale, con flusso ascendente e discendente, mostrano come le considerazioni fatte si ripercuotano sui valori del coefficiente di scambio, dando luogo a valori più elevati per il caso di flusso ascendente.

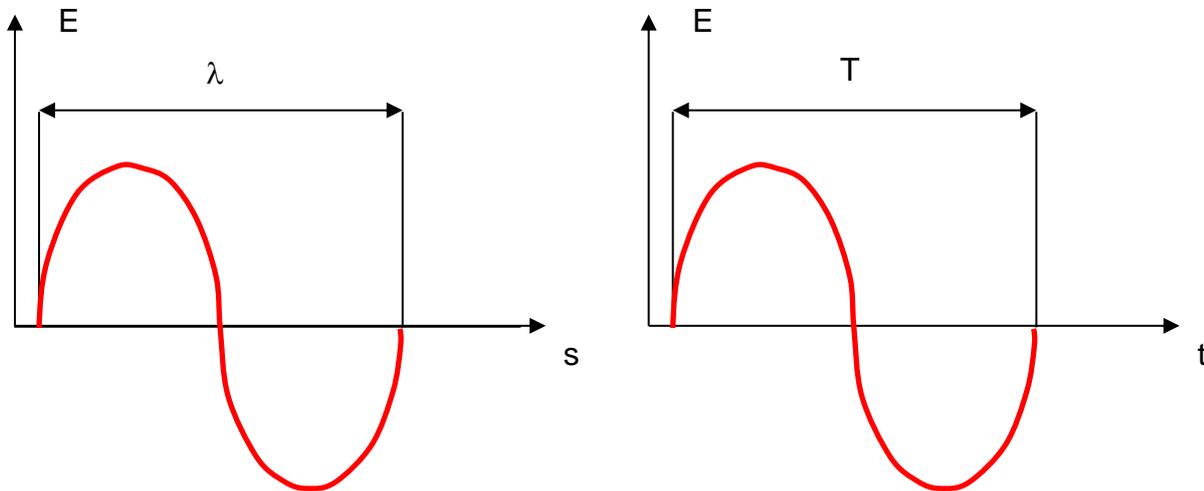
$$\text{Parete orizzontale, flusso ascendente: } h_c = 2,32 \cdot (\Delta T)^{0,25}$$

$$\text{Parete orizzontale, flusso discendente: } h_c = 1,16 \cdot (\Delta T)^{0,25}$$

## IRRAGGIAMENTO TERMICO

L'irraggiamento è un meccanismo di scambio termico che avviene attraverso radiazioni elettromagnetiche tra due corpi a diversa temperatura non a contatto tra di loro. Le perturbazioni periodiche del campo elettromagnetico che costituiscono la natura delle onde si propagano nello spazio anche in assenza di un mezzo elastico di trasporto come l'aria, per cui il trasferimento di calore per irraggiamento può avvenire anche nel vuoto, oltre che attraverso un mezzo non opaco alle radiazioni. L'aria, ad esempio, risulta trasparente alle radiazioni elettromagnetiche, poiché sia l'ossigeno che l'azoto, cioè i suoi componenti fondamentali, non interagiscono con esse.

Se indichiamo con  $E(s, t)$  il generico campo elettromagnetico definibile nello spazio  $s$  e nel tempo  $t$ , si possono studiare le sue perturbazioni periodiche, quindi il fenomeno ondulatorio che ne consegue, in due diagrammi bidimensionali nei quali è possibile definire le grandezze fisiche fondamentali necessarie per descrivere il fenomeno stesso.



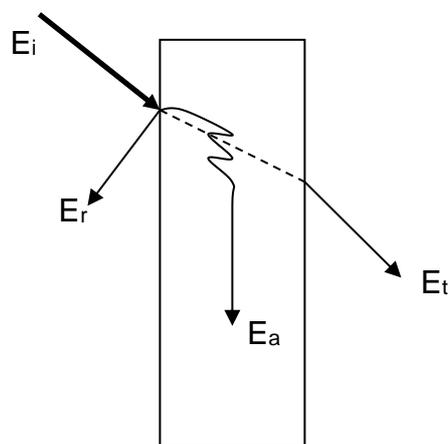
**Figura 17: Lunghezza d'onda e periodo di una radiazione**

Seguendo l'andamento del campo elettromagnetico nello spazio, fissato l'istante di tempo in cui il fenomeno viene osservato, si definisce "*lunghezza d'onda  $\lambda$* " la distanza tra un punto e quello ad esso successivo che assume lo stesso valore al termine di un ciclo completo (es. due massimi, due minimi, due punti omologhi). La lunghezza d'onda si misura in metri (m) o in uno dei suoi sottomultipli. Allo stesso modo, osservando il fenomeno in un certo punto dello spazio e seguendo la variazione del campo nel tempo, si definisce "*periodo  $T$* " e si misura in secondi (s) il tempo che intercorre tra due istanti, distanziati da un ciclo completo, in cui la perturbazione assume lo stesso valore. Si può ancora definire un'altra grandezza fondamentale che è la frequenza  $f$ , pari all'inverso del periodo. Quest'ultima si misura ovviamente in  $s^{-1}$  o Hz (Hertz). Se indichiamo con  $c$  la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche, pari, nel vuoto, a  $3 \times 10^8$  m/s, vale la seguente relazione:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Le radiazioni in grado di trasportare energia termica sono quelle emesse dai corpi solo in virtù del loro stato termico superficiale. Tutti i corpi a temperatura superficiale superiore a 0

K (zero assoluto) emettono onde termiche che differiscono tra di loro solo per la frequenza e per la lunghezza d'onda. Non rientrano in questa categoria le onde radio, i raggi X o fenomeni ondulatori quali la fluorescenza o la fosforescenza. Le onde elettromagnetiche che cadono nel campo del visibile (luce) e dell'infrarosso sono le principali responsabili del trasporto di calore. All'interno dello spettro di emissione di un corpo, tutte le radiazioni che hanno lunghezza d'onda compresa tra 380 e 780 nm circa appartengono al visibile, mentre quelle che hanno lunghezza d'onda inferiore a 380 nm sono ultraviolette (UV) e quelle con lunghezza d'onda superiore a 780 nm appartengono all'infrarosso (IR). I corpi esistenti in natura hanno comunemente temperature superficiali tali da emettere quest'ultimo tipo di radiazioni. In alcuni casi, se si raggiungono temperature elevate, dell'ordine delle migliaia di Kelvin, si innesca il fenomeno dell'incandescenza con emissione di radiazioni luminose. Quando una radiazione incide su una parete l'energia raggiante incidente  $E_i$  si ripartisce in una quota parte riflessa  $E_r$ , una trasmessa  $E_t$  ed una assorbita  $E_a$ .



**Figura 18: Effetto di una radiazione incidente su una parete**

Vale la seguente relazione:

$$E_i = E_r + E_t + E_a$$

Definiamo a questo punto i seguenti coefficienti:

Coefficiente di riflessione:  $r = \frac{E_r}{E_i}$

Coefficiente di trasmissione:  $t = \frac{E_t}{E_i}$

Coefficiente di assorbimento:  $a = \frac{E_a}{E_i}$

La relazione precedentemente scritta diventa:

$$\frac{E_i}{E_i} = \frac{E_r}{E_i} + \frac{E_t}{E_i} + \frac{E_a}{E_i} \Rightarrow r + t + a = 1$$

## Leggi di emissione del corpo nero

Per descrivere le modalità con cui un corpo emette o assorbe radiazioni, si introduce un modello di comportamento detto “*corpo nero*”.

Un corpo nero è definito come un *assorbitore perfetto* ed un *emettitore ideale*.

La prima delle due caratteristiche indica la sua capacità di assorbire tutta l'energia incidente sulla sua superficie. Un corpo può essere a comportamento ideale (nero) rispetto a tutte le radiazioni elettromagnetiche o rispetto ad una particolare sezione dello spettro elettromagnetico, cioè alle radiazioni caratterizzate da particolari valori della lunghezza d'onda. Ad esempio un manto di neve è considerato, con buona approssimazione, un corpo nero rispetto alle radiazioni infrarosse, ma di certo non lo è rispetto alle radiazioni visibili. La seconda caratteristica indica che un corpo “*a comportamento nero*” emette la massima energia raggiante ad una certa temperatura, ponendo un limite alla possibilità per i corpi reali di emettere radiazioni termiche: un corpo a temperatura superficiale  $T$  non può emettere una potenza termica superiore a quella di un corpo nero alla stessa temperatura e di uguale superficie.

Dato un corpo nero a temperatura  $T$ , definiamo la seguente Legge di Planck:

$$E_{n,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot \left( e^{C_2/\lambda T} - 1 \right)}$$

in cui:

$E_{n,\lambda}$ : potere emissivo monocromatico del corpo nero ( $\text{W}/\text{m}^2 \mu\text{m}$ );

$\lambda$ : lunghezza d'onda (m);

$T$ : temperatura (K);

$C_1$ :  $3,74 \cdot 10^8 \text{ W } \mu\text{m}^4/\text{m}^2$  ( $=3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$ )

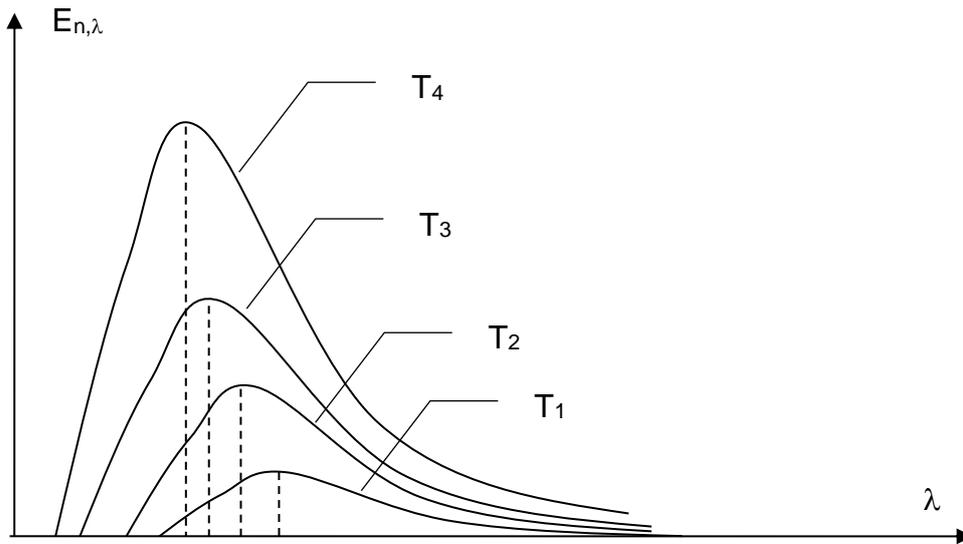
$C_2$ :  $1,44 \cdot 10^4 \mu\text{m K}$

Il potere emissivo monocromatico indica il flusso termico emesso da un corpo per unità di lunghezza d'onda, quindi fornisce la distribuzione spettrale della potenza termica. E' possibile rappresentare graficamente la legge di Planck in un diagramma in cui, una volta parametrizzata la temperatura superficiale del corpo, il potere emissivo sia espresso in funzione della lunghezza d'onda.

Le curve indicate in figura 19 rappresentano il potere emissivo monocromatico di quattro corpi a temperature superficiali diverse. In particolare, queste sono crescenti dalla  $T_1$  alla  $T_4$ . All'aumentare della temperatura, il punto di massimo di ciascuna curva assume valori crescenti del potere emissivo monocromatico, ma per lunghezze d'onda decrescenti.

La relazione che esiste tra la temperatura e la lunghezza d'onda di massima emissione, ricavabile effettuando un'operazione di derivazione della funzione di Planck, va sotto il nome di *Legge di Wien* ed afferma che *queste due grandezze risultano inversamente proporzionali*, essendo il loro prodotto pari ad una costante, come risulta dalla formula:

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$



**Figura 19: Potere emissivo monocromatico di un corpo nero**

Questa circostanza spiega il fenomeno dell'incandescenza, grazie al quale si ha la possibilità di produrre luce artificiale da un filamento di tungsteno ad elevata temperatura. In una lampada ad incandescenza, infatti, il filamento, attraversato da una corrente elettrica, si riscalda per effetto Joule fino a temperature vicine a 3000 K, in corrispondenza delle quali il punto di massimo della curva di emissione cade nel campo del visibile.

Se consideriamo il sole un corpo nero a temperatura superficiale pari approssimativamente a 6000 K, e calcoliamo, con la legge di Wien, la lunghezza d'onda del punto di massimo della sua curva di emissione, otteniamo:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2898 \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2898}{6000} = 0,483 \mu m$$

valore che ricade all'interno del campo del visibile.

Al contrario calcolando il punto di massimo per un corpo alla temperatura superficiale di 300 K, si ha:

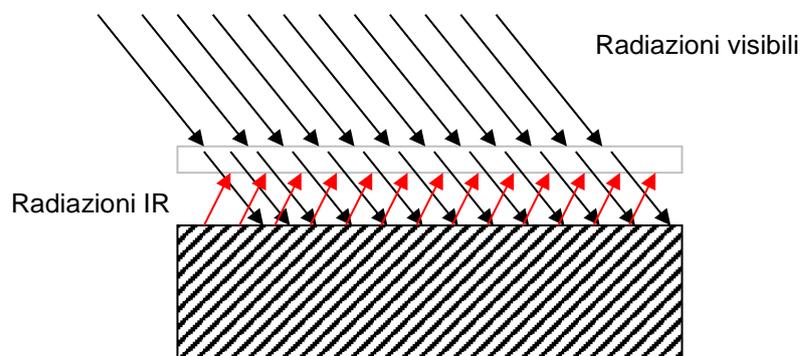
$$\lambda_{\max} \cdot T = 2898 \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2898}{300} = 9,66 \mu m$$

valore che è situato in pieno Infrarosso.

### **Effetto serra**

Una delle conseguenze della legge di Wien è l'effetto serra che si verifica ogni qualvolta si dispone un corpo opaco dietro una superficie trasparente al visibile (vetro, policarbonato...) sottoposta a radiazioni solari. L'energia solare proveniente dal sole è composta prevalentemente da radiazioni visibili ed infrarosse. Le radiazioni ultraviolette vengono

filtrate dallo strato di ozono presente nella stratosfera, che negli ultimi decenni del secolo scorso è stato danneggiato dai clorofluorocarburi (CFC) utilizzati nell'industria frigorifera. L'energia luminosa che incide sulla superficie trasparente, in massima quantità la attraversa e solo in piccole percentuali viene riflessa o assorbita; va ad incidere sulla superficie opaca che, al contrario, in grossa percentuale la assorbe. Tale assorbimento provoca un riscaldamento del corpo che così aumenta l'emissione di radiazioni infrarosse. Queste ultime, andando ad incidere sulla superficie trasparente, vengono da essa riflesse o assorbite, essendo la trasparenza del vetro relativa solo al campo del visibile. Quelle che il vetro assorbe ne provocano il riscaldamento, mentre quelle riflesse vanno ad incidere di nuovo sulla superficie opaca venendo a loro volta assorbite e contribuendo, in tal modo, al surriscaldamento del corpo. In definitiva l'aria compresa tra le due superfici, si trova a contatto con corpi ad elevata temperatura e subisce un surriscaldamento, denominato appunto effetto serra.



**Figura 20: Effetto serra**

Dalla legge di Planck, operando una integrazione della funzione all'interno dello spettro elettromagnetico, si può calcolare il potere emissivo totale di un corpo a temperatura T, secondo la legge di Stephan Boltzman:

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{n,\lambda} \cdot d\lambda = \sigma \cdot T^4 \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

essendo:

$\Phi$ : flusso termico globale emesso dal corpo nero ( $W/m^2$ )

$\sigma$ : costante di Stephan-Boltzman =  $5,67 \times 10^{-8}$  ( $W/m^2 K^4$ )

T: temperatura superficiale del corpo nero (K)

Noto il flusso termico, la potenza emessa dal corpo nero può essere calcolata moltiplicando il flusso per l'area della superficie del corpo.

$$\dot{Q} = \Phi \cdot A = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad [W]$$

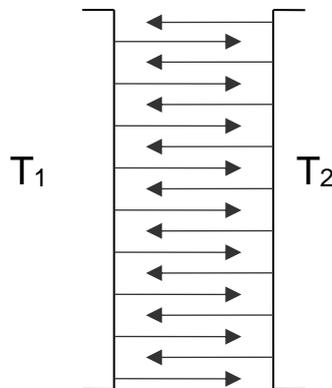
in cui:

$\dot{Q}$  : potenza termica emessa dal corpo nero (W);

A: area della superficie del corpo nero emittente (m<sup>2</sup>);

### **Scambi termici radiativi tra due corpi neri a diversa temperatura**

Finora abbiamo trattato l'argomento studiando le modalità con cui un corpo nero emette energia. Analizziamo ora cosa avviene quando due corpi neri scambiano tra loro energia termica radiante. Facciamo inizialmente l'ipotesi che i due corpi siano di uguali superfici e tra loro perfettamente affacciati, in modo tale che tutta l'energia radiante uscente da uno dei due vada ad incidere sull'altro e viceversa. I due corpi siano inizialmente a temperature superficiali  $T_1$  e  $T_2$ , con  $T_1 > T_2$ .



**Figura 21: Scambio termico tra corpi neri perfettamente affacciati**

Il corpo 1 emette complessivamente una potenza termica pari a:

$$\dot{Q}_1 = \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

mentre il corpo 2 emette una potenza pari a:

$$\dot{Q}_2 = \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4$$

Poiché entrambi sono neri, e la configurazione è tale che tutta l'energia emessa da uno incida sull'altro, si può calcolare la potenza termica scambiata tra i due in termini di bilancio termico effettuato sull'uno o sull'altro, computando, ad esempio per il corpo 1, la differenza tra la potenza termica assorbita e quella emessa, ottenendo:

$$\dot{Q}_{12} = \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4 - \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

Essendo le due superfici perfettamente interfacciate, si ha:

$$A_1 = A_2 = A \Rightarrow \dot{Q}_{12} = \sigma \cdot A \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

Ovviamente, se si effettua il bilancio termico sul corpo 2, si ottiene lo stesso risultato con il segno cambiato:

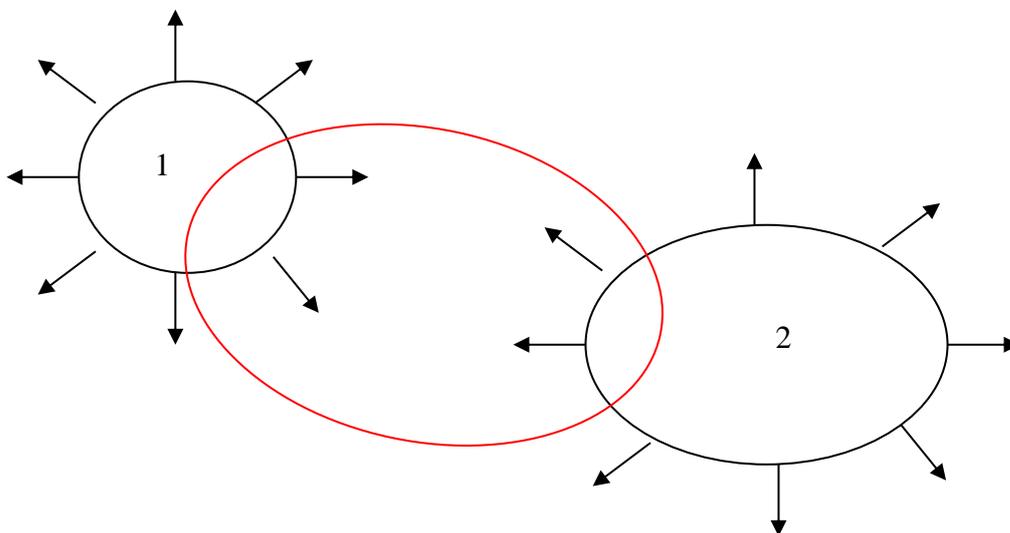
$$\dot{Q}_{21} = \sigma \cdot A \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Il fatto che il corpo 2 sia inizialmente più freddo del corpo 1 fa sì che nel processo 1 ceda complessivamente calore a 2 raffreddandosi ( $\dot{Q}_{12} < 0$ ) e 2 lo assorba da 1 riscaldandosi ( $\dot{Q}_{21} > 0$ ).

Nel caso in cui la temperatura del corpo 2 sia maggiore di quella del corpo 1 si verifica, ovviamente la situazione inversa specularmente, in cui il corpo 1 si riscalda ed il 2 si raffredda.

### **Fattore di intercettazione o di forma**

Se i due corpi che scambiano tra loro calore per irraggiamento non sono perfettamente affacciati, non tutta l'energia emessa da uno dei due incide sull'altro, ma solo una parte determinata dalla configurazione geometrica dell'intero sistema. L'energia rimanente viene dispersa in direzioni che non incidono sulle superfici dei due corpi interessati.



**Figura 22: Scambio termico tra corpi non perfettamente affacciati**

Per quantificare la potenza termica scambiata in configurazioni di questo genere è necessario introdurre una nuova grandezza adimensionale, denominata “*Fattore di intercettazione o di forma*”, in grado di descrivere la configurazione geometrica.

Il fattore di intercettazione  $F_{12}$  tra il corpo 1 ed il corpo 2 si definisce come il rapporto tra la potenza termica emessa dal corpo 1 che incide sul corpo 2 e quella totalmente emessa dallo stesso corpo 1. Allo stesso modo si definirà il fattore di intercettazione  $F_{21}$  tra il corpo 2 ed il corpo 1 come il rapporto tra la potenza emessa dal corpo 2 che incide su 1 e quella totalmente emessa dal corpo 2.

Tra i due fattori di intercettazione esiste una relazione, detta di reciprocità, per la quale il prodotto tra il fattore di intercettazione e l'area della superficie a cui si riferisce resta costante. In altre parole, indicate con  $A_1$  ed  $A_2$  le aree delle superfici dei due corpi che si scambiano calore, si ha:

$$F_{12} \cdot A_1 = F_{21} \cdot A_2$$

Il fattore di intercettazione, esprimendo una frazione della potenza emessa da un corpo rispetto alla potenza stessa, assume valore numerico inferiore ad uno. Risulta pari ad uno solo nel caso in cui i due corpi siano perfettamente affacciati.

Un caso particolare è rappresentato dallo scambio termico tra due corpi, che si presentino come nella figura 23: il corpo convesso 1 è immerso in una cavità (2).

L'energia emessa dal corpo 1 incide totalmente sul corpo 2, essendo il primo racchiuso dalla cavità costituita dal secondo, mentre l'energia emessa dal corpo 2 finisce solo in parte sul corpo 1 e la restante parte ricade sul corpo 2 stesso.

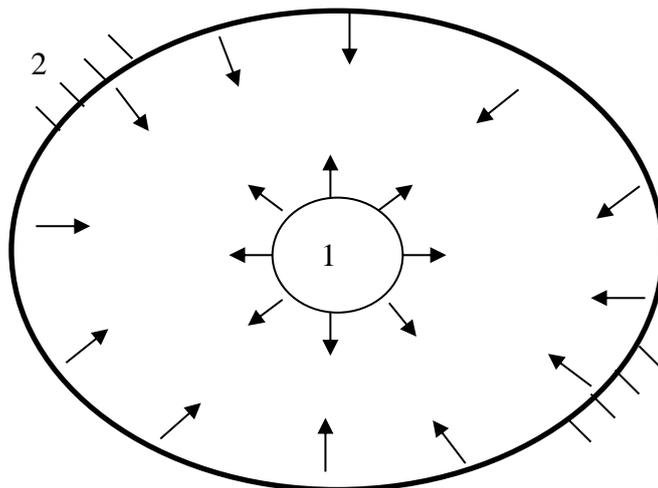
Si ha pertanto:

$$F_{12} = 1$$

e, per la relazione di reciprocità:

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2}$$

Essendo  $A_1 < A_2$ , si ha:  $F_{21} < 1$ .



**Figura 23: Scambio termico tra un corpo ed una cavità**

**Scambi termici radiativi tra due corpi neri a diversa temperatura non perfettamente affacciati.**

Immaginiamo che i corpi rappresentati in figura 22 siano a comportamento ideale nero e si trovino, rispettivamente, a temperature  $T_1$  e  $T_2$ , diverse tra di loro.

Il corpo 1 emette una potenza termica pari a:

$$\dot{Q}_1 = \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

ma solo una parte di essa incide sul corpo 2.

Indicato con  $F_{12}$  in fattore di intercettazione tra 1 e 2, essa vale:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = F_{12} \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

Analogamente, il corpo 2 emette una potenza pari a:

$$\dot{Q}_2 = \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4$$

e, definito con  $F_{21}$  il fattore di intercettazione tra 2 ed 1, si può calcolare la parte di questa che raggiunge il corpo 1:

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = F_{21} \cdot \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4$$

Poiché entrambi sono neri, tutta l'energia emessa da uno che incide sull'altro viene da questo completamente assorbita.

La potenza termica scambiata tra i due corpi può essere calcolata in termini di bilancio termico effettuato sull'uno o sull'altro.

Riferendosi, ad esempio al corpo 1, la differenza tra il calore assorbito e quello emesso vale:

$$\dot{Q}_{12} = \sigma \cdot A_2 \cdot F_{21} \cdot T_2^4 - \sigma \cdot A_1 \cdot F_{12} \cdot T_1^4$$

Essendo:

$$A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21}$$

si ottiene:

$$\dot{Q}_{12} = \sigma \cdot A_2 \cdot F_{21} \cdot (T_2^4 - T_1^4) = \sigma \cdot A_1 \cdot F_{12} \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

Ovviamente, se si effettua il bilancio termico sul corpo 2, si ottiene lo stesso risultato con il segno cambiato:

$$\dot{Q}_{21} = \sigma \cdot A_1 \cdot F_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \cdot A_2 \cdot F_{21} \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Se il corpo 2 è inizialmente più freddo del corpo 1, durante il processo 1 cede complessivamente calore a 2 raffreddandosi ( $\dot{Q}_{12} < 0$ ) e 2 lo assorbe da 1 riscaldandosi ( $\dot{Q}_{21} > 0$ ). Succede il contrario se la configurazione termica si inverte.

### **Emissione dei corpi grigi**

I corpi reali emettono radiazioni secondo modalità differenti da un corpo nero, presentando spettri di emissione molto più irregolari. In prima approssimazione si può ricondurre il comportamento dei corpi reali, dal punto di vista dell'emissione, ad un altro modello di corpo detto "*corpo grigio*", per il quale l'emissione radiativa ad una certa temperatura avviene secondo modalità simili a quelle del corpo nero ma con valori ridotti in funzione di un *coefficiente di emissione* o emissività  $\varepsilon$ .

L'emissività monocromatica di un corpo reale si definisce come il potere emissivo monocromatico del corpo fratto quello corrispondente di un corpo nero alla stessa temperatura:

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{E_{n,\lambda}}$$

La *legge di Kirchoff* afferma che, per qualsiasi lunghezza d'onda, emissività e coefficiente di assorbimento sono uguali:

$$\varepsilon_{\lambda} = a_{\lambda}$$

In generale, nei corpi reali, l'emissività dipende in maniera irregolare dalla lunghezza d'onda, mentre, nei corpi grigi, essa risulta indipendente da tale parametro ed assume un valore unico in tutto lo spettro di lunghezze d'onda per cui il comportamento di un corpo grigio dal punto di vista della potenza termica che emette ad una certa temperatura viene descritto da un'unica grandezza, valida per tutto lo spettro:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_n}$$

essendo  $E$  ed  $E_n$ , rispettivamente, il potere emissivo globale ( $W/m^2$ ) del corpo grigio e di quello nero alla stessa temperatura.

Ovviamente in tutto lo spettro si ha:

$$\varepsilon = a$$

Nota l'emissività di un corpo grigio, la potenza termica che emette è data da:

$$\dot{Q}_g = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

con ovvio significato dei simboli.

Consideriamo ancora una volta i due corpi perfettamente affacciati dell'esempio di figura 21 ed immaginiamo che il corpo 1 sia nero ed il 2 sia grigio caratterizzato da una emissività  $\varepsilon_2$ . Le potenze termiche che emettono sono, rispettivamente:

$$\dot{Q}_1 = \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

$$\dot{Q}_2 = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4$$

La potenza termica che il corpo 1 emette va ad incidere sul corpo 2 e viene assorbita da esso in misura proporzionale al suo coefficiente di assorbimento  $a_2$ :

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = a_2 \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot T_1^4$$

Al contrario quella che il corpo 2 emette viene totalmente assorbita dal corpo 1:

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A_2 \cdot T_2^4$$

La potenza scambiata tra 1 e 2 può essere valutata effettuando il bilancio termico sul corpo 2 o sul corpo 1. Ipotizziamo che  $A_1 = A_2 = A$ , e che l'emissività del corpo 2 sia coincidente con il suo coefficiente di assorbimento.

Per effettuare il bilancio sul corpo 2, consideriamo in ingresso la potenza emessa da 1 ed assorbita da 2 in funzione del suo coefficiente di assorbimento, ed in uscita quella emessa da 2 in virtù del suo coefficiente di emissione. Pertanto si ha:

$$\dot{Q}_{21} = a_2 \cdot \sigma \cdot A \cdot T_1^4 - \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A \cdot T_2^4 = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Al contrario, se effettuiamo il bilancio sul corpo 1, dobbiamo tener presente che la potenza termica in ingresso è data dalla somma di quella che il corpo 2 emette e di quella che, provenendo dal corpo 1, lo stesso corpo 2 non assorbe e rimanda verso 1, mentre in uscita si ha la potenza che 1 emette con le modalità di un corpo nero (emissività unitaria).

Pertanto si ha:

$$\dot{Q}_{12} = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A \cdot T_2^4 + (1 - a_2) \sigma \cdot A \cdot T_1^4 - \sigma \cdot A \cdot T_1^4 = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

ovviamente  $\dot{Q}_{12}$  esprime la quantità di calore scambiata complessivamente tra 1 e 2 che equivarrà a quella che il corpo più caldo cede e che quello più freddo assorbe.

Se i due corpi perfettamente interfacciati e a diversa temperatura sono entrambi grigi il problema risulta essere più complesso, poiché non tutta l'energia emessa dal corpo 1 viene assorbita dal corpo 2, ma parte viene riflessa e torna sul corpo 1 che di nuovo in parte la riflette rinviandola verso 2 e così via. Analogamente accade all'energia emessa da 2. Analiticamente, si giunge alla soluzione del problema determinando la somma di una serie convergente e la potenza termica scambiata tra i due corpi vale:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma \cdot A \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

con ovvio significato dei simboli.

Nel caso in cui i due corpi grigi non siano perfettamente interfacciati e la configurazione geometrica sia descritta da un fattore di intercettazione  $F_{12}$ , lo scambio termico tra i due corpi può essere determinato mediante espressioni del tipo:

$$\dot{Q}_{12} = F(A_1, A_2, F_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

in cui la  $F$  esprime una funzione delle aree, dei coefficienti di emissione e del fattore di intercettazione che, di volta in volta, assume valore diverso.

## **MECCANISMI COMBINATI DI SCAMBIO TERMICO: TRASMITTANZA DI UNA PARETE MULTISTRATO.**

Consideriamo una parete multistrato che separi, in regime stazionario e monodimensionale, un ambiente interno da uno esterno.

Sia  $T_{ai}$  la temperatura dell'aria nell'ambiente interno e  $T_{ae}$  la temperatura dell'aria nell'ambiente esterno. Nell'ambiente interno siano inoltre presenti un certo numero di corpi (pareti, soffitto, pavimento, arredi, persone...) ciascuno caratterizzato da una propria temperatura superficiale. Si indichi con  $T_{sj}$  la temperatura della generica superficie presente nell'ambiente. Altrettanto si faccia nell'ambiente esterno.

Tra l'aria presente nell'ambiente interno e la superficie interna della parete si verificano scambi convettivi mentre tra la superficie suddetta e le varie superfici a diversa temperatura presenti nell'ambiente si hanno scambi radiativi. Allo stesso modo avviene all'esterno.

Il problema viene risolto con il metodo dell'analogia elettrica mediante una schematizzazione della configurazione termica che permette di ricondurla ad una rete elettrica in cui ciascun nodo corrisponde ad un elemento isoterma (aria, superficie di una parete, corpo presente nell'ambiente, etc.) collegato a tutti quelli con cui scambia calore attraverso una resistenza. Il modello si basa sulla equivalenza del fenomeno termico e di quello elettrico, una volta ammessa, in regime stazionario, la perfetta analogia tra la differenza di temperatura, il flusso termico e la resistenza termica tra due nodi termici e, rispettivamente, la differenza di potenziale, la corrente elettrica e la resistenza elettrica tra i nodi corrispondenti nella rete elettrica.

Tutti gli scambi radiativi che avvengono tra le superfici di ciascuno dei due ambienti e la parete possono essere ridotti ad un unico fenomeno tra il nodo che indica la temperatura superficiale della parete, rispettivamente interna ed esterna, ed una particolare temperatura detta "*Temperatura media radiante*", definita come la *temperatura superficiale di un ipotetico corpo nero con il quale la superficie della parete considerata scambia per irraggiamento la stessa quantità di calore che scambia nella realtà*. E' dunque possibile calcolare una temperatura media radiante per l'ambiente interno  $T_{mr,i}$  ed una per l'ambiente esterno  $T_{mr,e}$ . In prima approssimazione la temperatura media radiante si calcola come media pesata tra tutte le temperature superficiali presenti. In formula:

$$T_{mr} = \frac{\sum_{j=1}^n T_{s,j} \cdot S_j}{\sum_{j=1}^n S_j}$$

essendo  $T_{s,j}$  la temperatura superficiale del generico corpo presente nell'ambiente.

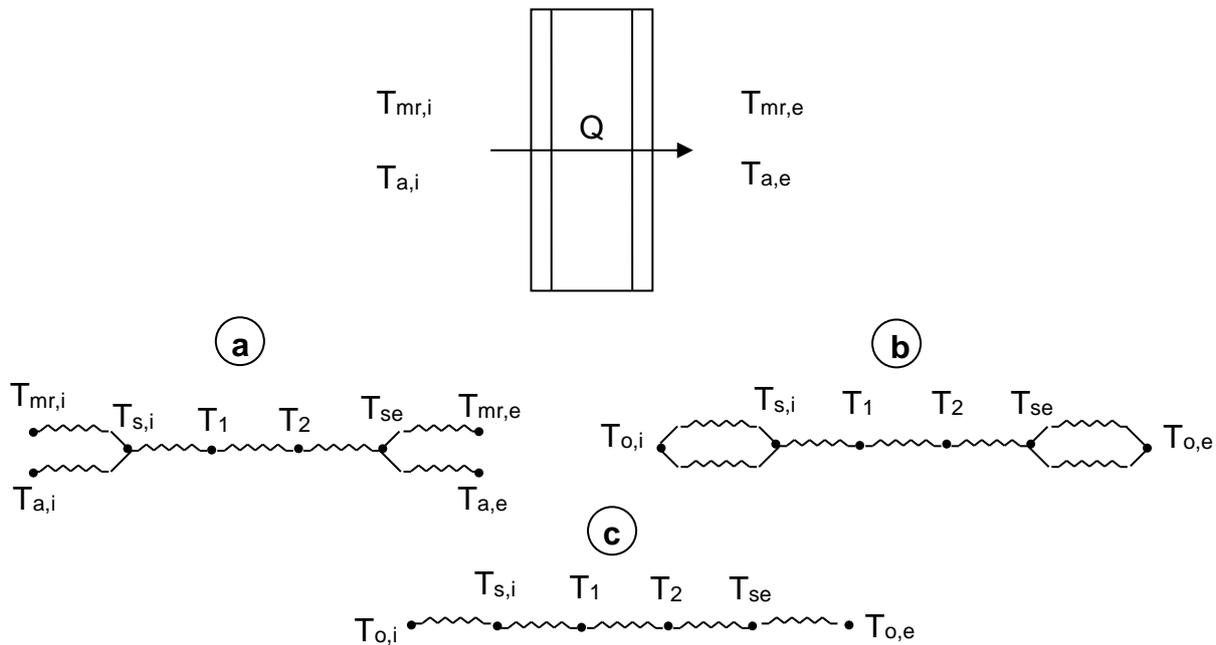
La figura 26 descrive graficamente lo schema elettrico mediante il quale viene studiato il fenomeno in tre fasi, che vanno dallo schema (a), al (b) ed infine allo schema risolutivo (c), secondo i passaggi che vengono di seguito descritti.

Lo scambio termico radiativo tra la temperatura media radiante interna  $T_{mr,i}$  e la temperatura superficiale interna della parete  $T_{s,i}$  e l'analogo tra la  $T_{mr,e}$  e la  $T_{s,e}$  dovrebbero essere descritti con relazioni del tipo:

$$Q = F \cdot \sigma \cdot (T_{mr,i}^4 - T_{s,i}^4)$$

$$Q = F \cdot \sigma \cdot (T_{s,e}^4 - T_{mr,e}^4)$$

in cui la potenza termica  $Q$  viene calcolata in funzione della differenza tra le quarte potenze delle temperature e di un fattore  $F$  che dipende dalle aree delle superfici dei due corpi che si scambiano calore, dalle loro emissività e dal fattore di intercettazione o di forma.



**Figura 26: Schema elettrico corrispondente ad una parete multistrato**

Tali relazioni possono essere “linearizzate”, introducendo un coefficiente di scambio termico radiativo  $h_r$ , che ovviamente dipenderà dalle temperature in gioco, del tutto analogo a quello convettivo, ottenendo:

$$Q = h_{r,i} \cdot A \cdot (T_{mr,i} - T_{s,i})$$

$$Q = h_{r,e} \cdot A \cdot (T_{s,e} - T_{mr,e})$$

Facendo riferimento allo schema della figura precedente, si nota inoltre che la configurazione elettrica che descrive gli scambi convettivi interni ed esterni può essere ricondotta ad uno schema a due resistenze in parallelo, riducendo i due nodi  $T_{mr}$  e  $T_a$  ad un unico nodo che caratterizzi con la sua temperatura il regime termico dell'intero ambiente cui si riferisce. Questa approssimazione è lecita nella maggior parte dei casi, essendo comunemente non molto dissimili la temperatura dell'aria e quella media radiante, mentre comporta errori più elevati in presenza di grosse superfici a temperatura drasticamente diversa da quella delle altre (ad esempio superfici vetrate estese).

Si introduce a tal proposito la temperatura operativa, rispettivamente interna ed esterna, che è costituita dalla media aritmetica tra la temperatura dell'aria e quella media radiante.

$$T_{o,i} = \frac{T_{a,i} + T_{mr,i}}{2}$$

$$T_{o,e} = \frac{T_{a,e} + T_{mr,e}}{2}$$

Quest'ultima approssimazione consente di trasformare il modello elettrico illustrato nello schema (a) in quello semplificato dello schema (b), in cui le due resistenze, convettiva e radiativa, sono disposte in parallelo. Si ha pertanto:

$$Q_{c,i} = h_{c,i} \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i})$$

$$Q_{r,i} = h_{r,i} \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i})$$

essendo:

$Q_{c,i}$ : potenza termica convettiva [W];

$h_{c,i}$ : coefficiente medio di scambio termico convettivo [W/m<sup>2</sup> K]

$Q_{r,i}$ : potenza termica radiativa [W];

$h_{r,i}$ : coefficiente di scambio termico radiativo (W/m<sup>2</sup> K).

Sommando i due contributi, come reso lecito dalla configurazione in parallelo delle due resistenze, si ottiene il flusso termico complessivamente scambiato tra l'ambiente interno e la superficie interna della parete:

$$Q_i = (h_{r,i} + h_{c,i}) \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i}) \Rightarrow Q_i = \alpha_i \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i})$$

In tale espressione compare un nuovo coefficiente,  $\alpha_i$ , denominato *adduttanza interna* o *coefficiente di adduzione interno*, che descrive contemporaneamente tutti gli scambi termici, convettivi e radiativi, che avvengono tra l'ambiente interno e la superficie interna della parete. In modo del tutto analogo si definisce l'adduttanza esterna  $\alpha_e$ , somma dei coefficienti radiativo e convettivo esterni:

$$Q_e = (h_{r,e} + h_{c,e}) \cdot A \cdot (T_{s,e} - T_{o,e}) \Rightarrow Q_e = \alpha_e \cdot A \cdot (T_{s,e} - T_{o,e})$$

Evidentemente l'adduttanza è dimensionalmente uguale ad una conduttanza unitaria e si misura quindi in W/m<sup>2</sup>K. E' possibile pertanto definire la resistenza unitaria corrispondente, che chiameremo adduttiva, data dal suo inverso  $1/\alpha$ , misurabile in m<sup>2</sup> K/W.

A questo punto la configurazione del modello elettrico è diventata quella dello schema (c) di figura 26, in cui tutte le resistenze sono disposte in serie. In particolare, procedendo dall'interno verso l'esterno, si incontrano: una resistenza adduttiva interna, tre resistenze conduttive, relative agli strati della parete, ed infine una resistenza adduttiva esterna.

A partire da tale configurazione è possibile ridurre tutte le resistenze unitarie in serie ad un'unica resistenza unitaria totale con la seguente procedura:

$$Q = \alpha_i \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i}) = \frac{1}{1/\alpha_i} \cdot A \cdot (T_{o,i} - T_{s,i}) \Rightarrow (T_{o,i} - T_{s,i}) = \frac{Q}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_i}$$

$$Q = \frac{\lambda_1}{L_1} \cdot A \cdot (T_{s,i} - T_1) = \frac{1}{L_1/\lambda_1} \cdot A \cdot (T_{s,i} - T_1) \Rightarrow (T_{s,i} - T_1) = \frac{Q}{A} \cdot \frac{L_1}{\lambda_1}$$

$$Q = \frac{\lambda_2}{L_2} \cdot A \cdot (T_1 - T_2) = \frac{1}{L_2/\lambda_2} \cdot A \cdot (T_1 - T_2) \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{Q}{A} \cdot \frac{L_2}{\lambda_2}$$

$$Q = \frac{\lambda_3}{L_3} \cdot A \cdot (T_2 - T_{s,e}) = \frac{1}{L_3/\lambda_3} \cdot A \cdot (T_2 - T_{s,e}) \Rightarrow (T_2 - T_{s,e}) = \frac{Q}{A} \cdot \frac{L_3}{\lambda_3}$$

$$Q = \alpha_e \cdot A \cdot (T_{s,e} - T_{o,e}) = \frac{1}{1/\alpha_e} \cdot A \cdot (T_{s,e} - T_{o,e}) \Rightarrow (T_{s,e} - T_{o,e}) = \frac{Q}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_e}$$

Sommando membro a membro le equazioni scritte, si ottiene:

$$Q = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_e} \right)^{-1} \cdot A \cdot (T_i - T_e)$$

avendo, per semplicità, indicato con  $T_i$  e  $T_e$  le temperature operative interna ed esterna. Se indichiamo con  $R_T$  la resistenza termica unitaria totale della parete potremo scrivere:

$$R_{uT} = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_e} \right) \quad \left( \frac{m^2 \cdot K}{W} \right)$$

L'inverso della resistenza termica unitaria totale è la trasmittanza termica della parete pari a:

$$K = \frac{1}{R_{uT}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_e}} \quad \left( \frac{W}{m^2 \cdot K} \right)$$

La determinazione della trasmittanza termica di una parete multistrato consente dunque di calcolare la potenza termica che la attraversa in regime stazionario, se essa è sottoposta ad una differenza di temperatura  $T_i - T_e$ , una volta note le caratteristiche della parete stessa. Infatti:

$$Q = K \cdot A \cdot (T_i - T_e) \quad (W)$$

Nota la potenza termica che attraversa la parete, si può determinare l'andamento delle temperature strato per strato, imponendo l'uguaglianza, in regime stazionario, tra la potenza che attraversa l'intera parete ed ogni sua singola parte.<sup>3</sup> In questa ipotesi, si ha:

$$Q = K \cdot A \cdot (T_i - T_e) = \alpha_i \cdot A \cdot (T_i - T_{s,i}) \Rightarrow T_{s,i} = T_i - K \cdot (T_i - T_e) \cdot \frac{1}{\alpha_i}$$

Analogamente:

$$Q = K \cdot A \cdot (T_i - T_e) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1}} \cdot A \cdot (T_i - T_1) \Rightarrow T_1 = T_i - K \cdot (T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} \right)$$

In altre parole, la temperatura alla generica interfaccia tra due strati è data da quella interna meno il prodotto del flusso per unità di superficie e della resistenza unitaria incontrata fino a quello strato. Valgono pertanto ancora le seguenti relazioni:

$$T_2 = T_i - K \cdot (T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right)$$

$$T_{s,e} = T_i - K \cdot (T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} \right)$$

---

<sup>3</sup> Con riferimento ad un generico strato interno alla parete, il flusso che entra in esso deve uguagliare quello che da esso fuoriesce; in altre parole in qualsiasi strato, anche infinitesimo, si vada a calcolare il flusso termico, esso sarà sempre uguale a quello che attraversa l'intera parete. Se così non fosse, sarebbe possibile individuare uno strato di materiale all'interno del quale il flusso entrante sarebbe diverso da quello uscente, ma questo provocherebbe una variazione di temperatura nel tempo di tale strato, contraddicendo l'ipotesi di regime stazionario.

## VERIFICA DI CONDENSA SUPERFICIALE

All'interno degli ambienti possono crearsi condizioni igieniche sfavorevoli legate alla possibilità che parte del vapore presente nell'aria trovi, sulle superfici più fredde che delimitano l'ambiente stesso, condizioni idonee perché si verifichi il fenomeno della condensa superficiale. Si tratta di un fenomeno che può interessare la faccia interna di una parete di separazione tra l'ambiente interno e quello esterno, in particolare quando su tale parete la temperatura superficiale assume valori considerati a rischio. Questo avviene solitamente su porzioni di parete caratterizzate da dispersioni particolarmente intense, come ad esempio le discontinuità geometriche e/o strutturali denominate ponti termici, o su intere superfici, quali quelle vetrate che, per loro natura, presentano elevati valori della dispersione e sono dunque più fredde delle altre superfici di contorno.

Il verificarsi del fenomeno della condensa superficiale può dar luogo a formazione di muffe sulle pareti che rendono critiche le condizioni igieniche ambientali ed è maggiormente probabile in ambienti ricchi di vapore (servizi, cucine...) o dove non sia effettuato un efficace ricambio dell'aria.

Date le caratteristiche termodinamiche dell'aria presente in ambiente è possibile determinare, mediante l'utilizzo di un diagramma psicrometrico, la sua temperatura di rugiada, ossia quella alla quale si realizzano condizioni di saturazione durante un processo di raffreddamento sensibile.

Ad esempio, come illustrato nella figura 27, un ambiente caratterizzato da una temperatura a bulbo asciutto di 20 °C e da una umidità relativa del 50 % presenta una temperatura di rugiada di 9 °C, direttamente determinabile dal diagramma psicrometrico.

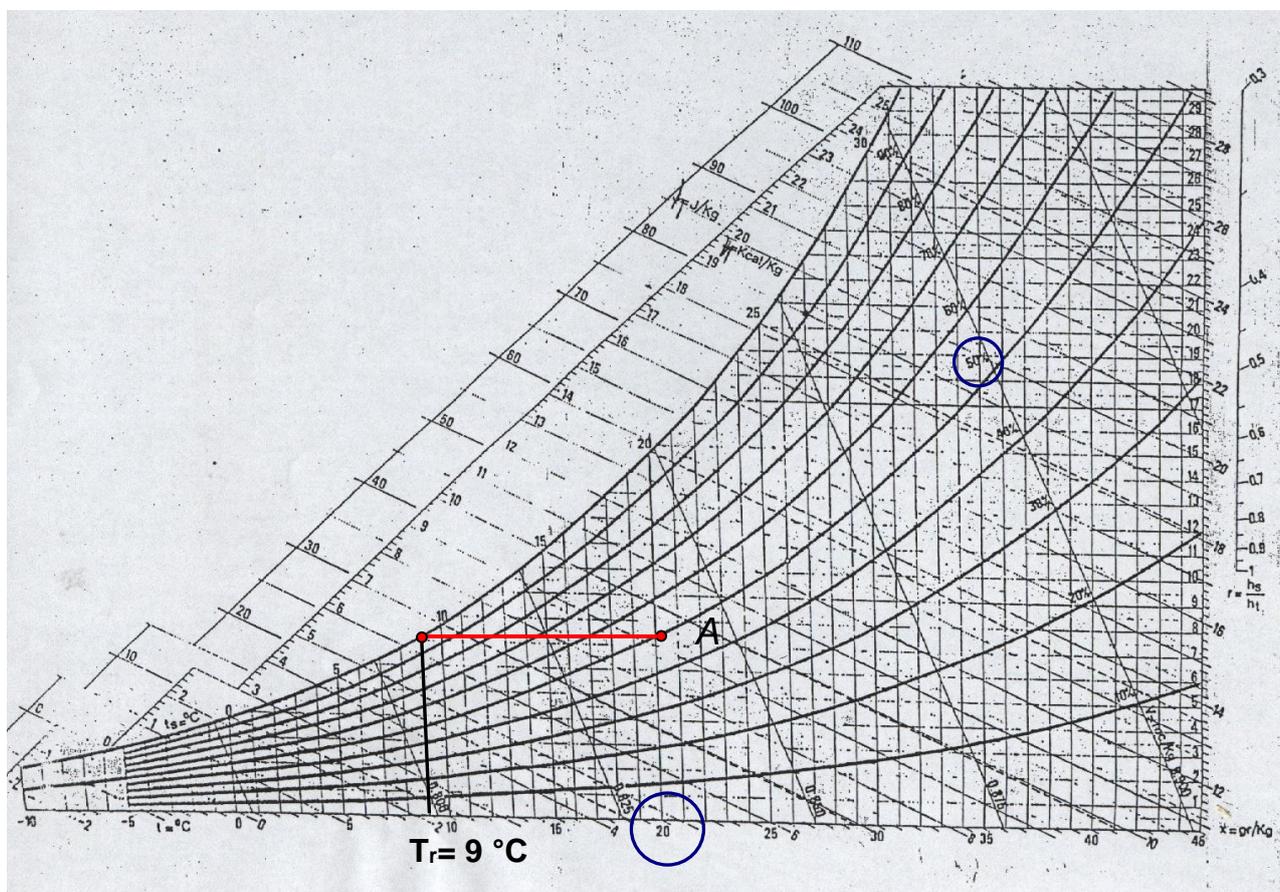


Figura 27: Esempio di determinazione della temperatura di rugiada

Per scongiurare il fenomeno della condensa superficiale è necessario verificare che le temperature delle superfici di contorno dell'ambiente non assumano valori minori o uguali alla temperatura di rugiada, poiché, solo in questo caso, viene evitata la possibilità di far raffreddare l'aria ambiente fino alle condizioni di saturazione. E' evidente che tale verifica va effettuata nelle condizioni di esercizio più severe, che si realizzano in corrispondenza della temperatura di progetto esterna in regime stazionario.

In tali ipotesi, la temperatura superficiale interna di una parete esterna si determina con la seguente relazione:

$$T_{s,i} = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \frac{1}{\alpha_i}$$

essendo:

$T_{s,i}$ : temperatura superficiale interna (K)

$T_i$ : temperatura dell'ambiente interno (K)

$T_e$ : temperatura dell'ambiente esterno (K)

$K$ : trasmittanza della parete ( $W/m^2 K$ )

$\alpha_i$ : adduttanza interna ( $W/m^2 K$ )

Se tale temperatura si mantiene su valori superiori a quello assunto dalla temperatura di rugiada anche sulle pareti più disperdenti il fenomeno della condensa superficiale è scongiurato.

Esso si verifica invece ogni qualvolta:

$$T_{s,i} \leq T_R$$

Poiché la determinazione di  $T_{s,i}$  è strettamente legata al valore di  $K$ , si può ovviare ad un valore di  $T_{s,i}$  troppo basso diminuendo il valore della trasmittanza della parete, ad esempio inserendo in essa un materiale isolante. E' possibile, in questo caso, calcolare il valore che deve avere la resistenza di tale strato aggiuntivo per evitare il fenomeno della condensa. Infatti, se indichiamo con  $R_T$  la resistenza unitaria totale della parete in condizioni attuali, si ha:

$$R_T = \frac{1}{K}$$

D'altro canto, l'aggiunta di un materiale isolante comporta un aumento di resistenza unitaria pari al valore che ha la resistenza unitaria dello strato aggiunto  $R_{isol}$ .

La nuova resistenza unitaria totale vale:

$$R'_T = R_T + R_{isol}$$

e di conseguenza la nuova trasmittanza assume il seguente valore:

$$K' = \frac{1}{R_T'} = \frac{1}{R_T + R_{isol}}$$

Tale valore deve dar luogo ad una temperatura superficiale interna superiore a quella di rugiada. Imponendo allora che la temperatura superficiale interna sia uguale a quella di rugiada si ottiene il valore minimo che deve assumere la resistenza unitaria aggiuntiva al fine di evitare la condensa superficiale.

$$T_{s,i} = T_R \Rightarrow T_R = T_i - K'(T_i - T_e) \cdot \frac{1}{\alpha_i} \Rightarrow K' = \alpha_i \cdot \frac{(T_i - T_R)}{(T_i - T_e)}$$

Nota  $K'$ , si può determinare il corrispondente valore di  $R_{isol}$ :

$$K' = \frac{1}{R_T + R_{isol}} \Rightarrow R_T + R_{isol} = \frac{1}{K'} \Rightarrow R_{isol} = \frac{1}{K'} - R_T$$

Il calcolo della resistenza del materiale isolante da aggiungere alla parete permette di determinare agevolmente, una volta fissato il tipo di isolante e la sua conducibilità termica, lo spessore minimo che esso deve assumere per scongiurare il fenomeno della condensa superficiale:

$$R_{isol} = \frac{l_{isol}}{\lambda_{isol}} \Rightarrow l_{isol} = R_{isol} \cdot \lambda_{isol}$$

con ovvio significato dei simboli.

## VERIFICA DI CONDENSA INTERSTIZIALE – Metodo di GLASER

In regime invernale il vapore acqueo presente all'interno di un ambiente tende a migrare verso l'esterno a causa della differenza tra i valori che assume la pressione parziale del vapore nell'ambiente interno ed in quello esterno.

All'interno della parete possono verificarsi le condizioni perché parte di questo vapore condensi, provocando deterioramento dei materiali e peggioramento delle prestazioni termiche degli stessi. Particolarmente a rischio sono i materiali isolanti per i quali l'eventuale presenza di acqua liquida, oltre a peggiorare drasticamente le prestazioni termiche, ne causa il deterioramento ed il precoce invecchiamento. Inoltre, in alcuni casi, come ad esempio nelle pareti delle celle frigorifere, l'acqua liquida formatasi per effetto della condensa può solidificare, aggravando ulteriormente la situazione, poiché, aumentando di volume, può provocare danni irreversibili come la rottura della parete.

E' necessario allora effettuare una verifica che escluda la formazione di condensa interstiziale. Qualora le condizioni ambientali fossero tali da non poterla scongiurare, sarà necessario accertarsi che la quantità d'acqua liquida formatasi all'interno della parete per condensa del vapore acqueo sia inferiore ai valori limite imposti dalla normativa vigente, ma tale ulteriore verifica esula dagli scopi del presente corso.

Il metodo utilizzato per verificare la possibilità del fenomeno della condensa interstiziale è di tipo grafico ed è dovuto a Glaser. Esso si applica in regime stazionario in condizioni di picco, cioè nelle condizioni climatiche più severe.

La verifica di condensa interstiziale va fatta tenendo presente che non è nota esattamente la quantità di vapore che attraversa ogni strato, essendo diverso il comportamento dei singoli materiali al flusso di vapore: alcuni sono infatti più permeabili al vapore, altri meno. Questo determina una presenza di vapore in quantità incerte all'interno dei vari strati.

Si procede allora esaminando i valori assunti da un parametro strettamente legato alla quantità di vapore presente, cioè la pressione parziale del vapore.

Perché si verifichi condensa ad una certa temperatura è necessario che il vapore si trovi in condizioni di saturazione, cioè che la sua pressione parziale assuma un valore pari a quella di saturazione a quella medesima temperatura.

$$p_v = p_s(T)$$

E' necessario allora determinare gli andamenti della pressione di saturazione e della pressione parziale del vapore all'interno della parete e verificare che quest'ultima assuma sempre valori inferiori alla prima per scongiurare il fenomeno della condensa.

La pressione di saturazione interna e quella esterna si determinano in funzione della temperatura attraverso opportune tabelle o attraverso relazioni del tipo:

$$p_s(T) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T} - 5.976 \ln(T) \right]$$

con le temperature espresse in K.

La conoscenza della temperatura dell'aria e dell'umidità relativa nell'ambiente interno ed in quello esterno ci permette di determinare i valori della pressione parziale del vapore interna ed esterna, una volta noti i valori interno ed esterno della pressione di saturazione.

$$p_{v,i} = p_s(T_i) \cdot \Phi_i$$

$$p_{v,e} = p_s(T_e) \cdot \Phi_e$$

A partire dalla conoscenza di  $p_s(T_e)$  e di  $p_s(T_i)$  e dell'andamento delle temperature all'interno della parete precedentemente calcolato si possono determinare i vari valori di  $p_s(T)$ . La Figura 28 rappresenta l'andamento delle temperature in regime stazionario in una parete multistrato, al crescere dello spessore della parete stessa. Queste vengono determinate nel modo seguente, una volta note le  $T_i$  e  $T_e$ :

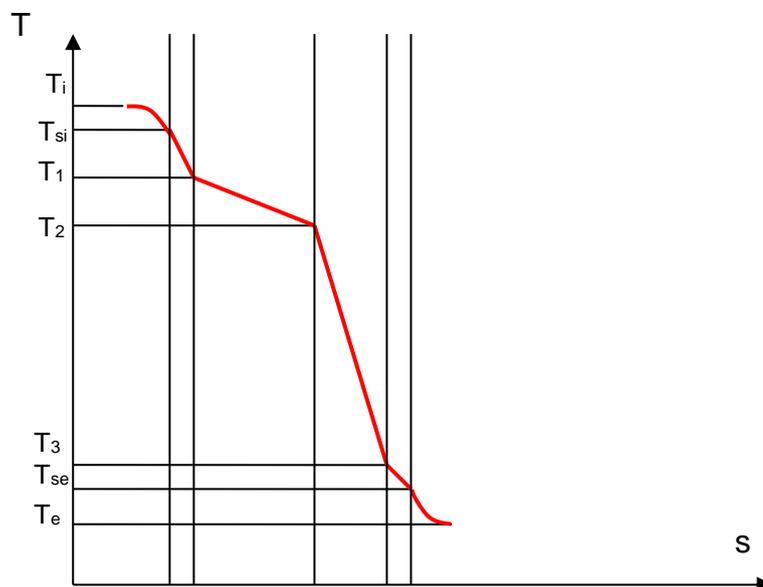
$$T_{s,i} = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \frac{1}{\alpha_i}$$

$$T_1 = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} \right)$$

$$T_2 = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} \right)$$

$$T_3 = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} \right)$$

$$T_{s,e} = T_i - K(T_i - T_e) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4} \right)$$



**Figura 28: Andamento delle temperature in una parete multistrato**

Con la relazione scritta precedentemente si determinano i valori di  $p_s(T)$  per ogni  $T$ :

$$p_s(T_i) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T_i} - 5.976 \ln(T_i) \right]$$

$$p_s(T_{s,i}) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T_{s,i}} - 5.976 \ln(T_{s,i}) \right]$$

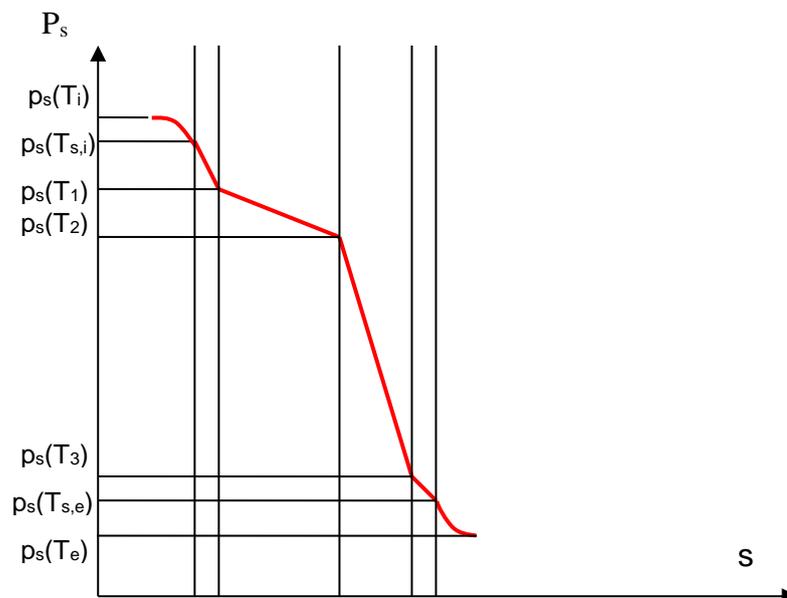
$$p_s(T_1) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T_1} - 5.976 \ln(T_1) \right]$$

.....

$$p_s(T_{s,e}) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T_{s,e}} - 5.976 \ln(T_{s,e}) \right]$$

$$p_s(T_e) = \exp \left[ 65.81 - \frac{7066.27}{T_e} - 5.976 \ln(T_e) \right]$$

La conoscenza di tali valori permette di disegnare la spezzata che rappresenta l'andamento delle pressioni di saturazione all'interno della parete, che risulta ovviamente analogo a quello delle temperature (cfr. Figura 29).



**Figura 29: Andamento delle pressioni di saturazione in una parete multistrato**

Per calcolare l'andamento delle pressioni parziali del vapore si applica al fenomeno del flusso di vapore in regime stazionario il metodo dell'analogia elettrica già utilizzato per descrivere il fenomeno termico. In particolare, si ha:

$$G = \Pi \cdot A \cdot (p_{v,i} - p_{v,e})$$

in cui:

G: flusso di vapore (kg/s);

$\Pi$ : permeanza al vapore della parete multistrato (kg/s m<sup>2</sup> Pa)

A: area della sezione perpendicolare al flusso di vapore (m<sup>2</sup>)

$p_{v,i}$ : pressione parziale del vapore nell'ambiente interno (Pa)

$p_{v,e}$ : pressione parziale del vapore nell'ambiente esterno (Pa)

La permeanza della parete è data dall'inverso della resistenza unitaria totale al flusso di vapore  $R_v$ , che, a sua volta, si calcola come somma delle resistenze unitarie dei singoli strati. Nell'ipotesi che si possano trascurare la resistenza al flusso di vapore tra l'ambiente interno e la superficie interna della parete e tra la superficie esterna della parete e l'ambiente esterno<sup>4</sup>, si ha:

$$\Pi = \frac{1}{R_v}$$

Nell'esempio considerato, in cui la parete è costituita da quattro strati, si ha:

$$R_v = \frac{s_1}{\pi_1} + \frac{s_2}{\pi_2} + \frac{s_3}{\pi_3} + \frac{s_4}{\pi_4}$$

in cui:

$\pi_i$ : permeabilità al vapore dello strato  $i$ -esimo (kg/s m Pa)

$s_i$ : spessore dello strato  $i$ -esimo (m)

La pressione parziale del vapore in corrispondenza dello strato  $i$ -esimo sarà data, in perfetta analogia con il fenomeno termico, dal valore della pressione parziale interna meno un termine dato dal flusso di vapore per unità di superficie per la resistenza incontrata fino allo strato in questione. In formula:

$$p_{vs,i} = p_{v,i}$$

$$p_{v,1} = p_{v,i} - \Pi \cdot (p_{v,i} - p_{v,e}) \cdot \left(\frac{s_1}{\pi_1}\right)$$

$$p_{v,2} = p_{v,i} - \Pi \cdot (p_{v,i} - p_{v,e}) \cdot \left(\frac{s_1}{\pi_1} + \frac{s_2}{\pi_2}\right)$$

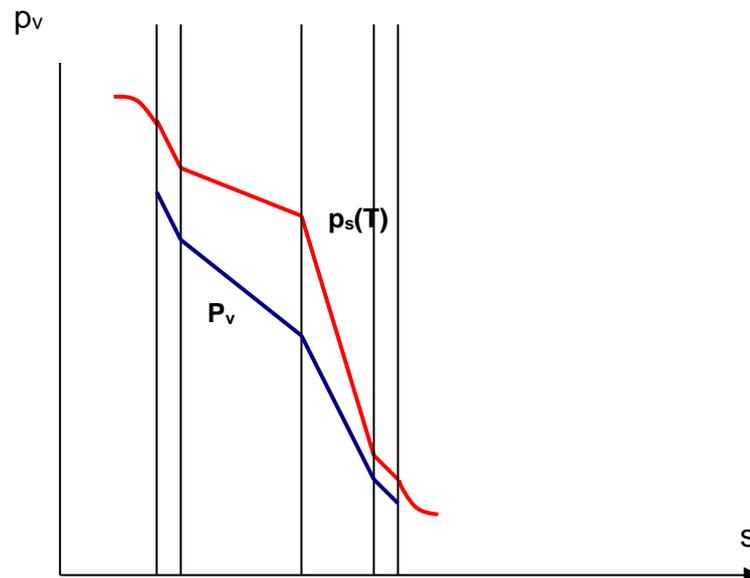
$$p_{v,3} = p_{v,i} - \Pi \cdot (p_{v,i} - p_{v,e}) \cdot \left(\frac{s_1}{\pi_1} + \frac{s_2}{\pi_2} + \frac{s_3}{\pi_3}\right)$$

$$p_{vs,e} = p_{v,i} - \Pi \cdot (p_{v,i} - p_{v,e}) \cdot \left(\frac{s_1}{\pi_1} + \frac{s_2}{\pi_2} + \frac{s_3}{\pi_3} + \frac{s_4}{\pi_4}\right)$$

$$p_{ve} = p_{vs,e}$$

<sup>4</sup> La resistenza al vapore dell'aria è di almeno di tre ordini di grandezza inferiore a quella dei materiali da costruzione.

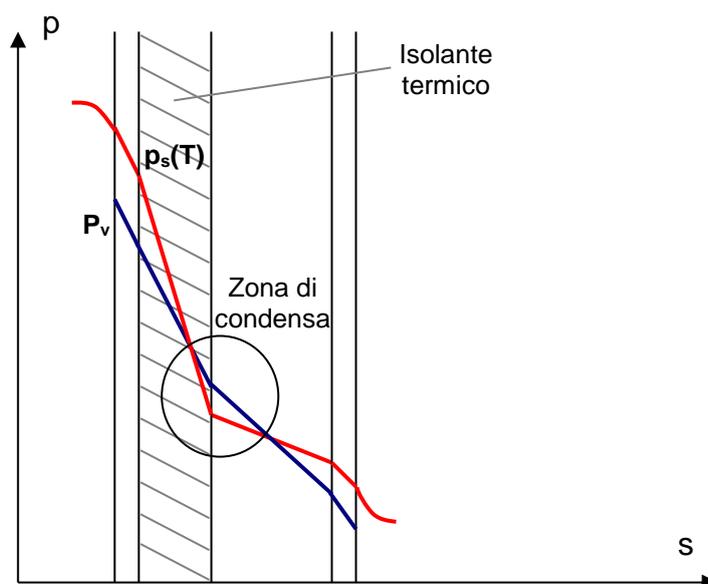
La conoscenza dei valori numerici assunti dalla pressione parziale in corrispondenza dei vari strati consente di tracciare la spezzata che ne rappresenta l'andamento e di confrontarla con quella precedentemente disegnata delle pressioni di saturazione, come illustrato nella figura seguente:



**Figura 30: Confronto tra le pressioni parziali del vapore e quelle di saturazione in una parete multistrato (assenza del fenomeno della condensa)**

Il caso rappresentato in figura 30 rappresenta la situazione più favorevole, cioè quella in cui il fenomeno della condensa interstiziale è scongiurato poiché per ogni sezione la pressione parziale del vapore risulta sempre inferiore a quella di saturazione.

Quando in un punto singolo o in una zona della parete si verifica la sovrapposizione tra le due spezzate, si ha la concreta possibilità che abbia luogo il fenomeno della condensa, come illustrato nella figura 31.



**Figura 31: Confronto tra le pressioni parziali del vapore e quelle di saturazione in una parete multistrato (presenza del fenomeno della condensa)**

In questo caso la successione degli strati gioca un ruolo fondamentale. Poiché lo strato in cui si verifica la più repentina caduta di temperatura, quindi di pressione di saturazione, è quello che offre la maggior resistenza termica, la zona a maggior rischio di condensa è di solito posizionata all'interno o immediatamente dopo lo strato di isolante. E' pertanto pericoloso posizionare tale materiale all'interno della parete vicino alla superficie interna, dove le pressioni parziali sono più elevate ed il rischio di intersezione tra le due spezzate è più probabile. E' preferibile disporre il più possibile all'esterno della parete il materiale isolante, in modo da ridurre tale rischio.

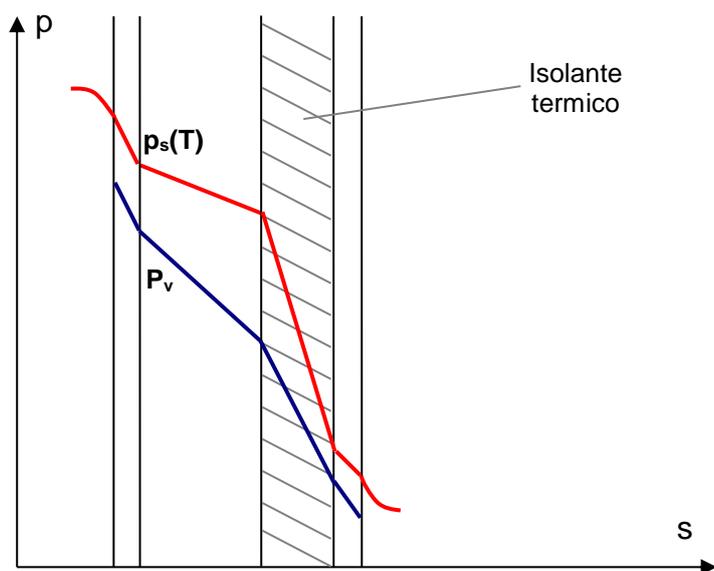
Nel caso illustrato in figura 31, dalla sezione in cui inizia la sovrapposizione delle due spezzate, in tutta l'area in cui l'andamento delle pressioni parziali supera quello delle pressioni di saturazione, si verificano condizioni di saturazione. Pertanto quella indicata è la zona interessata dal fenomeno della condensa del vapore acqueo.

E' da precisare che, mentre la spezzata delle pressioni di saturazione non viene modificata dal verificarsi del fenomeno, quella delle pressioni parziali precedentemente costruita non è più rappresentativa di tale parametro in tutta la zona di possibile condensa, non essendo più nota, proprio a causa di tale fenomeno, la reale quantità di vapore presente.

Il punto di inizio condensa rappresenta la sezione in cui è massima la probabilità del verificarsi del fenomeno, quindi, in tale sezione, le due spezzate si toccano, assumendo lo stesso valore. A destra di tale sezione la curva delle pressioni parziali dovrebbe assumere valori inferiori a quelli della pressione di saturazione, essendo in atto il fenomeno della condensa, che fa diminuire la quantità di vapore presente o, al massimo, essere ad essa tangente.

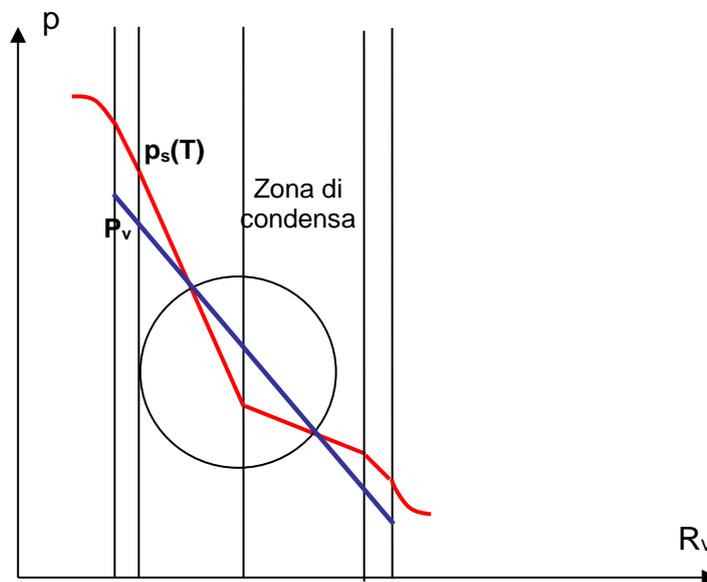
Da quanto esposto, risulta evidente che è necessario prevedere il fenomeno della condensa interstiziale, per poterlo evitare. Una possibile soluzione è rappresentata dal posizionamento dello strato di materiale isolante all'esterno della parete (isolamento a cappotto) in modo da innalzare la spezzata delle temperature e conseguentemente delle pressioni di saturazione scongiurando l'intersezione con quella delle pressioni parziali.

Modificando la sequenza degli strati della parete di figura 31 si ottiene la situazione illustrata in figura 32, risolutiva del problema. Infatti spostando lo strato di isolante dalla posizione che occupa in figura 31 a quella di figura 32, le due spezzate non si intersecano ed il fenomeno non può avere luogo.



**Figura 32: Spostamento all'esterno dello strato di isolante (assenza di condensa)**

Un'altra soluzione è rappresentata dall'applicazione, il più possibile vicino alla superficie interna della parete, di una "barriera al vapore", costituita da uno strato sottile di materiale a bassissima permeabilità al vapore, che provoca una elevata caduta della pressione parziale scongiurando il verificarsi del fenomeno. Le barriere al vapore sono di solito costituite da fogli di alluminio, di polietilene, di PVC o di cartone bitumato i cui spessori variano da alcuni centesimi di millimetro a qualche millimetro. Visto il loro spessore molto piccolo, il loro contributo alla resistenza termica della parete è trascurabile e non modifica l'andamento delle temperature, quindi delle pressioni di saturazione, dentro la parete stessa. Lo spessore minimo della barriera al vapore necessario per scongiurare il fenomeno della condensa, può essere determinato con un metodo grafico disegnando l'andamento delle pressioni parziali e di saturazione su un diagramma in cui in ascisse siano disposte le resistenze al vapore dei vari strati di parete anziché gli spessori.



**Figura 33: Andamento delle pressioni parziali e di saturazione in funzione delle resistenze al vapore**

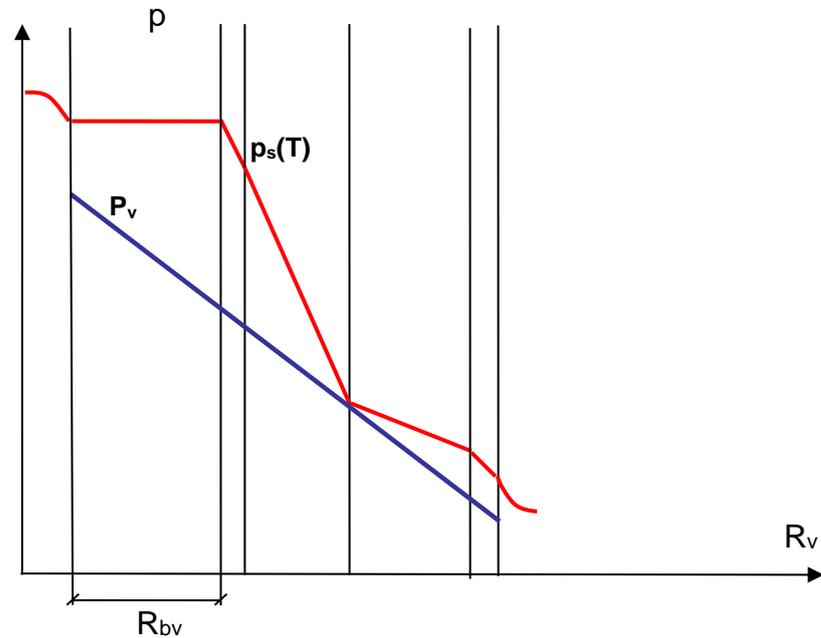
Anche in un diagramma di questo tipo si può evidenziare la zona di condensa il cui spessore, però, ovviamente, non è desumibile direttamente dal grafico.

In questo tipo di diagramma, l'andamento delle pressioni parziali è rettilineo. Infatti l'equazione considerata per il calcolo delle pressioni parziali rappresenta una retta il cui coefficiente angolare è dato dal valore del flusso di vapore per unità di superficie  $\Phi_v$  in regime stazionario. Al valore del flusso di vapore è legata dunque la pendenza della retta, tanto più accentuata quanto maggiore è il flusso stesso.

$$p_{v,x} = p_{v,i} - \Pi \cdot (p_{v,i} - p_{v,e}) \cdot R_{vx} = p_{v,i} - \Phi_v \cdot R_{vx}$$

Poiché le pressioni parziali interna ed esterna sono desumibili dai relativi valori della pressione di saturazione e dalle umidità relative, i loro valori non vengono modificati dall'aggiunta della barriera al vapore. Per determinare l'entità della resistenza al vapore che sarà necessario aggiungere, dunque, dello spessore minimo della barriera al vapore, si tratterà allora un segmento di retta che, avendo come punti estremi quelli determinati dai valori interno ed esterno delle pressioni parziali, tocchi in un solo punto la spezzata delle pressioni di saturazione, come illustrato nella figura 34, permettendo di leggere sull'asse

delle ascisse il valore della resistenza al vapore aggiuntiva minima in grado di risolvere il problema della condensa.



**Figura 34: Determinazione grafica della resistenza al vapore aggiuntiva offerta dalla barriera al vapore**

Nota la resistenza al vapore aggiuntiva, si può determinare agevolmente lo spessore della barriera al vapore, nota la sua permeabilità con la relazione:

$$R_{bv} = \frac{L_{bv}}{\pi_{bv}} \Rightarrow L_{bv} = R_{bv} \cdot \pi_{bv}$$

Dove  $R_{bv}$ ,  $L_{bv}$  e  $\pi_{bv}$  rappresentano, rispettivamente, la resistenza al vapore, lo spessore e la permeabilità della barriera al vapore.