



# Fisica Tecnica (Modulo 1)- LM4

## Fisica Tecnica – L23

A.A. 2021-2022





# Lezione n. 6

Gas ideali

Trasformazioni notevoli dei gas ideali



**Aeriformi:**

**Vapori:** possono trasformarsi in liquidi (condensazione)

**Gas:** non possono trasformarsi in liquidi

**GAS IDEALI o PERFETTI:** Modello di riferimento per il comportamento dei gas.

**Leggi semplici** applicabili ai gas reali con buona approssimazione, crescente al crescere dello stato di rarefazione del gas (valori bassi della pressione)

**Pressione molto bassa** → forze e legami tra le particelle microscopiche di entità molto piccola che le rende quasi indipendenti l'una dall'altra.

**Errore** commesso nel considerare a comportamento ideale un gas reale **tanto minore** quanto più **piccola** è la sua **massa molecolare** e più **elevata** la sua **temperatura**.

**Gas di impiego comune** ( $O_2$ ,  $N_2$ , Ar,  $CO_2$ ): **errori** < **1%** nella determinazione dei valori delle grandezze caratteristiche.

**Errore crescente** all'aumentare della **densità** del gas (es. vapore acqueo negli impianti termici a vapore - p elevata, fluidi refrigeranti negli impianti frigoriferi).

**Vapore acqueo** a comportamento **ideale** (indipendentemente da T) **per p < 10 kPa**

**Vapore acqueo** nell'aria a comportamento ideale negli impianti di climatizzazione.

**Aria** a comportamento ideale con **errori** < **1 %** fino a **pressioni** < **25 atm**.

## I LEGGE DI STATO

Mette in relazione le **grandezze di stato fondamentali**:  
pressione **p**, volume **V** e temperatura **T**.

**Boyle** (1662): gas molto rarefatto  $T = cost \Rightarrow p \cdot v = cost$

**Charles e Gay Lussac** (1802) : a bassa pressione  $v \propto T$

$$p \cdot v = R \cdot T$$

p: pressione del gas (Pa);

v: volume specifico del gas (m<sup>3</sup>/kg);

T: temperatura del gas (K);

R: costante di proporzionalità del gas considerato (J/kg K)

	R (kJ/kg K)
Argon	0,2081
Aria	0,2870
Azoto	0,2968
Elio	2,0769

Permette di determinare **una grandezza di stato in funzione delle altre due** una volta **noto il gas particolare** di costante **R**

$$p \cdot v = R \cdot T \Rightarrow p \cdot \frac{V}{M} = R \cdot T \Rightarrow p \cdot V = M \cdot R \cdot T$$

n: numero di moli/kilomoli (grammo/kilogrammo molecole)

Una **grammo/kilogrammo-molecola** (mole/kilomole): **quantità** in grammi/kilogrammi pari alla **massa molecolare del gas**

$\bar{M}$ : *massa molecolare* = somma delle masse atomiche dei componenti

**Esempio:**

H<sub>2</sub>O       $\bar{M} = 2+16 = 18 \Rightarrow 18 \text{ g (kg) di H}_2\text{O costituiscono una mole (kmole)}$

O<sub>2</sub>       $\bar{M} = 16+16 = 32 \Rightarrow 32 \text{ g (kg) di O}_2 \text{ costituiscono una mole (kmole)}$

N<sub>2</sub>       $\bar{M} = 14 + 14 = 28 \Rightarrow 28 \text{ g (kg) di N}_2 \text{ costituiscono una mole (kmole)}$

**Una mole di qualsiasi gas** contiene sempre lo stesso numero di molecole (particelle elementari): **6,022 x 10<sup>23</sup> (numero di Avogadro)**

$$n = \frac{M}{\bar{M}} \Rightarrow p \cdot V = n \cdot \bar{M} \cdot R \cdot T$$

$$\bar{R}: \text{costante universale dei gas ideali} = 8314 \frac{J}{\text{kmole} \cdot K}$$

$$\bar{R} = \bar{M} \cdot R \Rightarrow p \cdot V = n \cdot \bar{R} \cdot T$$

Permette di determinare **una grandezza di stato in funzione delle altre due** noto il **numero di moli** indipendentemente dalla conoscenza del tipo di gas utilizzato (**validità generale**)

## II LEGGE DI STATO

Riguarda le **grandezze di stato di carattere energetico: energia interna ed entalpia.**

L'**energia interna** di un gas ideale **dipende solo dalla temperatura.**

$$U = U(T) \quad u = u(T)$$

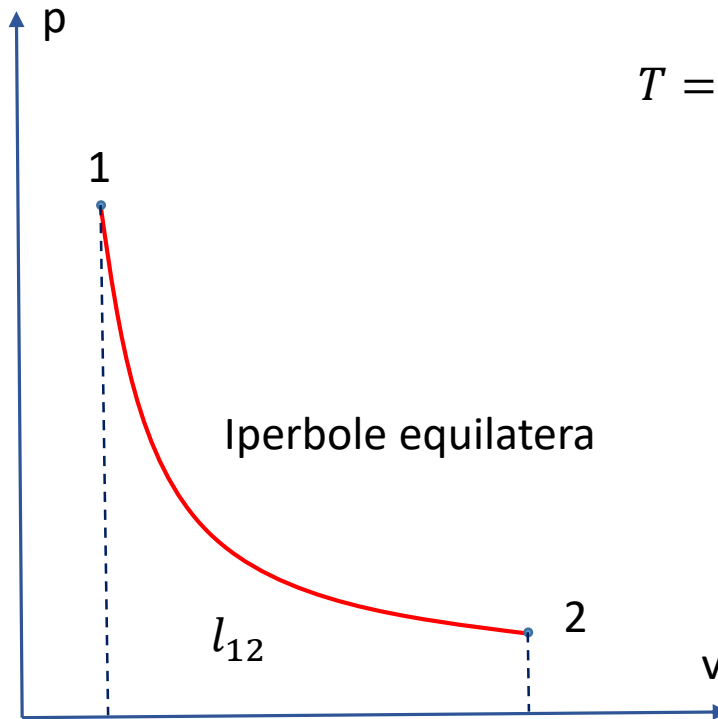
Se **varia l'energia interna** di un gas ideale (es. isocora) **varia la sua temperatura.**

$$H = U + p \cdot V = U(T) + n \cdot \bar{R} \cdot T$$

Se **varia l'entalpia** di un gas ideale (es. isobara) **varia la sua temperatura.**

L'effetto termico prodotto su un gas ideale mediante uno **scambio di energia** è **sempre** di tipo **sensibile** e mai latente.

## TRASFORMAZIONE ISOTERMA DI UN GAS IDEALE



$$T = \text{cost} \Rightarrow p \cdot v = R \cdot T = \text{cost}$$

**Lavoro specifico**

$$\begin{aligned} l_{12} &= \int_1^2 p \cdot dv = \int_1^2 \frac{R \cdot T}{v} dv = \\ &= R \cdot T \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \end{aligned}$$

Trasformazione isoterma del gas ideale:

$$p \cdot v = \text{cost} \Rightarrow p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow l_{12} = R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

## Lavoro

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_1^2 p \cdot dV = \int_1^2 \frac{n \cdot \bar{R} \cdot T}{V} dV = \\ &= n \cdot \bar{R} \cdot T \cdot \int_1^2 \frac{dV}{V} = n \cdot \bar{R} \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n \cdot \bar{R} \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

La stessa espressione è **ottenibile moltiplicando per la massa M il lavoro specifico:**

$$L_{12} = M \cdot l_{12} = M \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \bar{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \bar{R} \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \bar{R} \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

**I Principio** della Termodinamica:  $Q_{12} = U_2 - U_1 + L_{12}$

**II Legge** di stato dei gas ideali:  $T_1 = T_2 \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow Q_{12} = L_{12}$

E analogamente:  $q_{12} = l_{12}$



## TRASFORMAZIONE ADIABATICA DI UN GAS IDEALE

Trasformazione adiabatica: **senza scambi di calore** tra il sistema e l'ambiente esterno.

Trasformazione adiabatica dei gas ideali:

$$p \cdot v^K = \text{cost} \quad K = \frac{c_p}{c_v}$$

$$p \cdot v^K = \text{cost} \Rightarrow p_1 \cdot v_1^K = p_2 \cdot v_2^K$$

**Lavoro specifico**

$$l_{12} = \int_1^2 p \cdot dv = \int_1^2 \frac{\text{cost}}{v^K} \cdot dv = \text{cost} \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v^K} = \frac{\text{cost}}{1-K} \cdot (v_2^{1-K} - v_1^{1-K})$$

$$\text{cost} = p_1 \cdot v_1^K = p_2 \cdot v_2^K \Rightarrow l_{12} = \frac{p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1}{1-K}$$

In funzione delle **condizioni iniziali** e del **rapporto di compressione**, ricordando che:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{K}}$$

$$l_{12} = \frac{p_1 \cdot v_1}{1-K} \cdot \left( \frac{p_2 \cdot v_2}{p_1 \cdot v_1} - 1 \right) = \frac{p_1 \cdot v_1}{1-K} \cdot \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{K}} - 1 \right] = \frac{p_1 \cdot v_1}{1-K} \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{K-1}{K}} - 1 \right]$$

## Calori specifici a pressione e a volume costante

**Calore specifico:** caratteristica del sistema considerato - **dipende dalle modalità** con cui viene scambiato il calore.

$$c = \frac{dq}{dT}$$

Trasformazione **isoterma:**  $dT = 0 \Rightarrow c \rightarrow \text{infinito}$

Trasformazione **adiabatica:**  $dq = 0 \Rightarrow c = 0$

Trasformazione **isocora:**  $c_V = \left( \frac{dq}{dT} \right)_V$

**I Principio** della Termodinamica:  $dq = du \Rightarrow c_V = \frac{du}{dT}$

Trasformazione **isobara:**  $c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_p$

**I Principio** della Termodinamica:  $dq = dh \Rightarrow c_p = \frac{dh}{dT}$

Le **espressioni di  $c_v$  e  $c_p$**  ricavate rispettivamente in un processo **isocoro** ed in uno **isobaro**, per i **gas ideali** assumono **validità generale** e **possono essere sempre applicate**.

## Relazione tra $c_p$ e $c_v$ in un gas ideale

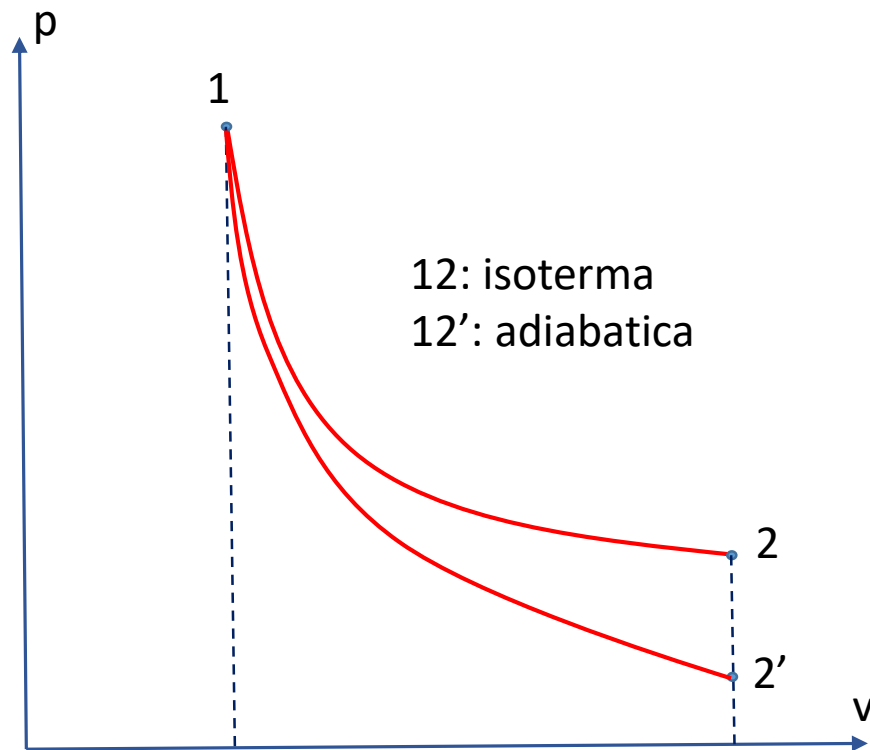
In un **gas ideale** si può sempre scrivere (**indipendentemente dalla trasformazione seguita**):

$$du = c_v \cdot dT \quad dh = c_p \cdot dT$$

$$h = u + p \cdot v \Rightarrow dh = du + d(p \cdot v) \Rightarrow c_p \cdot dT = c_v \cdot dT + R \cdot dT \Rightarrow c_p = c_v + R$$

Risulta:  $c_p > c_v \Rightarrow K > 1$

In un **diagramma p-v** l'**adiabatica** di un **gas ideale** è rappresentata da una **curva** con una **pendenza più accentuata** rispetto all'**isoterma**.



Dimostriamo che il **punto 2'** è caratterizzato da un **valore di pressione più basso** di quello del **punto 2** a parità di volume finale della trasformazione

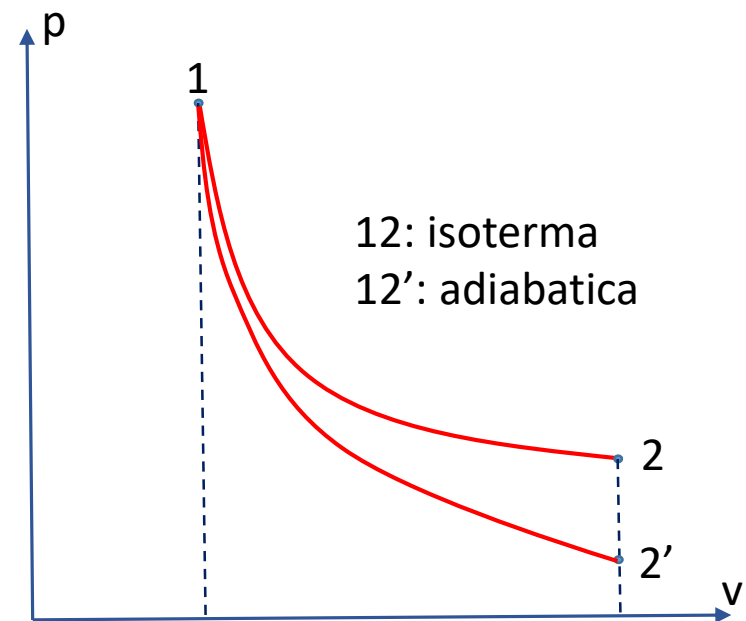
Isoterma 1-2: 
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

Adiabatica 1-2': 
$$\frac{p_{2'}}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^K \Rightarrow p_{2'} = p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^K$$

Poiché  $v_1 < v_2$  e  $K > 1 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^K < \frac{v_1}{v_2}$

Un numero minore di 1 elevato ad un esponente maggiore di 1 diminuisce di valore.

Da cui si deduce che:  $p_{2'} < p_2$



**Gas monoatomici** (gas nobile: Neon Ne, Elio He, Argon Ar...):

$$c_v = \frac{3}{2} \cdot R \qquad c_p = \frac{5}{2} \cdot R$$

R: costante particolare del gas considerato.

Di conseguenza si ha:  $K = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$

**Gas biatomici** (idrogeno H<sub>2</sub>, ossigeno O<sub>2</sub>, azoto N<sub>2</sub>...):

$$c_v = \frac{5}{2} \cdot R \qquad c_p = \frac{7}{2} \cdot R$$

Di conseguenza si ha:  $K = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$

## Trasformazione POLITROPICA

Trasformazione di carattere **generale** descritta dalla relazione:

$$p \cdot v^n = \text{costante} \qquad p \cdot V^n = \text{costante}$$

Al variare di  $n$  la trasformazione diventa una di quelle notevoli già considerate:

- $n = 0 \Rightarrow p = \text{costante} \rightarrow$  **ISOBARA**
- $n \rightarrow \infty \Rightarrow p^{\frac{1}{n}} \cdot v = \text{costante} \Rightarrow p^{\frac{1}{\infty}} \cdot v = \text{costante} \Rightarrow v = \text{costante} \rightarrow$  **ISOCORA**
- $n = 1 \Rightarrow p \cdot v = \text{costante} \rightarrow$  **ISOTERMA di un GAS IDEALE**
- $n = K \Rightarrow p \cdot v^K = \text{costante} \rightarrow$  **ADIABATICA di un GAS IDEALE**

## Lavoro in una trasformazione POLITROPICA

$$l_{12} = \frac{p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1}{1 - n}$$

$$L_{12} = \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{1 - n}$$

$$l_{12} = \frac{p_1 \cdot v_1}{1 - n} \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

$$L_{12} = \frac{p_1 \cdot V_1}{1 - n} \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$